Brauer 群とある明示公式の非存在について

植松哲也

東京大学大学院数理科学研究科

2012 年 8 月 30 日 / 東京大学玉原セミナーハウス (群馬)

体の Brauer 群

k :(可換) 体

Definition

L が k 上の斜体とは,

- 可換とは限らない体 (斜体).
- k 上有限次元ベクトル空間.
- 中心が k.

問題意識

体 k を与えたとき, 体 k 上の斜体はどれくらいあるのか？

Definition

$\mathrm{Br}(k) := \{L : k$ 上の斜体 $\}/$同型類.

- この集合には，可換群の構造を入れることができる．この群を Brauer 群と呼ぶ.
- この構造を知ることにより，体 k に関わる諸問題に対して，種々の応用がある (2 次形式の分類，Hasse 原理，類体論 etc).
- 応用上は，$\mathrm{Br}(k)$ の構造だけでなく，「シンボル表示」と呼ばれる，元の表示が有用.

代数と幾何をつなぐもの

空間から関数 (環) が定まる:
位相空間 $X \rightsquigarrow X$ 上の連続関数のなす環 $C(X)$.
逆に，関数 (環) から, 図形の性質が規定される:

Example

$C(X)$ に有界関数しかない $\Rightarrow X$ がある種「閉じた」空間.

- 数直線 $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数:非有界でもよい.
- 円周 S^1 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数:有界なものに限る.

cf. C^* 環

環から，その環を関数環に持つような図形を作る.

代数と幾何をつなぐもの

代数幾何

「方程式の解」や「可換環」という代数的対象をスキームという幾何学的対象としてとらえることにより，研究する．

- 方程式 $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$
- (関数) 環 $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(f(x_1, \ldots, x_n))$
- アフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} A$

- 方程式 $f = 0$ の k における解
- 関数環 A の極大イデアル
- スキームの間の写像 $\operatorname{Spec} k \longrightarrow X$ (X の点)

スキームの Brauer 群

- 体 k に対し, 群の同型 $\mathrm{Br}(k) \cong H^2_{\mathrm{Gal}}(G_k, \overline{k}^*)$ がある. ((コ) ホモロジー：数学的対象からある種の不変量を抽出する仕組み. ex. Euler 数 (Betti 数))
- H^*_{Gal} の一般化としての H^*_{et}.

Definition (スキームの Brauer 群)

X : スキームに対し,

$$\mathrm{Br}(X) := H^2(X, \mathbb{G}_m).$$

この $\mathrm{Br}(X)$ も体の場合の $\mathrm{Br}(k)$ と同様に, X の幾何や, 数論に応用 (有理性問題, 代数的サイクルの計算, Hasse 原理) があり, $\mathrm{Br}(X)$ の群構造や「シンボル表示」を求めることが大切.

$\mathbb{P}^3$ の非特異対角的 3 次曲面
$X : ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ に対して，その Brauer 群の生成元を与えるような「公式」がないことを示した．

Example

2 次方程式の解の公式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

個々の方程式が単に解をもつ，ということだけでなく，その解がパラメータ a, b, c の情報で統一的に記述できる．
例えば，$2x^2 + 3x + 5 = 0$ の解が知りたければ，公式に $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ を「代入」すればよい．

- k : 1 の原始 3 乗根 ζ を含む体
- X : k-係数非特異対角的 3 次曲面

$$x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

群 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ の生成元を与えるような公式を考える.

$x^3 + y^3 + z^3 + dt^3 = 0$ の場合, Yu. I. Manin

- $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- 生成元として, $\left\{d, \dfrac{x+\zeta y}{x+y}\right\}_3$, $\left\{d, \dfrac{x+z}{x+y}\right\}_3$ がとれる.

$\{\cdot,\cdot\}_3 : k(X)^* \otimes k(X)^* \longrightarrow \mathrm{Br}(k(X))$: ノルム剰余記号
$k(X)$: X 上の有理関数体, $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k(X))$

- $x^3 + y^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ としても, 同様の公式がある.

$x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ の場合

k にある条件を課した上で,

- ほとんどすべての (b, c, d) に対し,
  $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- この場合には生成元を与えるような公式は存在しない.

(証明の方針)

- 3 変数関数体 $F = k(b, c, d)$
- F 上の 3 次曲面 $\mathcal{X} : x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$
- $P = (b_0, c_0, d_0) \in (k^*)^3$
- $\mathcal{X}_P : x^3 + b_0y^3 + c_0z^3 + d_0t^3 = 0$
- 代入写像 $\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Br}(\mathcal{X}_P)$ を定式化.
- (a)Brauer 群の自明性:$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(F) = 0$.
- (a)$\Rightarrow$ 非存在性 (容易)

なぜ公式がないのか？

1 つの解答

- $x^3+y^3+z^3+dt^3=0$, $x^3+y^3+cz^3+dt^3=0$
  $\longrightarrow$ 係数によらずに，常に方程式に解が存在する (例えば，$[1:-1:0:0]$ など).
- $x^3+by^3+cz^3+dt^3=0$
  $\longrightarrow$ (b,c,d) 次第で解があったりなかったりする (次ページ).

このクラスの曲面の Brauer 群の生成元を統一的に書き表すことができないということは，このような曲面の整数論的多様性の現れだといえる.

対角的3次曲面の有理点

Example

- $k = \mathbb{Q}$
- $x^3 + 2y^3 - 4z^3 + 15t^3 = 0$ は $[7 : -5 : 3 : -1]$ を有理数解として持つ.
- $5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0$ は有理数解を持たない.

一方で,2 つ目の曲面 X について

- $\forall p, \quad X(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$
- $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

であり (局所解の存在), これは Hasse 原理の反例を与える. この反例は Brauer-Manin 障害というものを用いて構成された (Colliot-Thélène, Kanevsky, Sanscu).

ご清聴ありがとうございました.