論文の要旨

論文題目:
On the Local Evaluation Map of the Brauer-Manin Obstruction
(ブラウアー・マニン障害の局所評価写像について)

氏名: 植松 哲也

代数多様体に対してハッセ原理が成立するか否かを記述する手法として, 今日, ブラウアー・マニン障害と呼ばれているものが, マニンによって構成された [Man70]. これは代数体 F 上の代数多様体 X のアデール点と (コホモロジカル) ブラウアー群の元に対して $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の元を対応させる対写像 $X(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を基にして構成されるものであり, したがって, その研究においては,

1. ブラウアー群の構造を調べること;
2. 与えたブラウアー群の元に対して定まる写像 $X(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の性質を調べること;

が重要な課題としてあげられる.

本論文は, 上記課題の 2. に対して研究を行ったものである. 2. で現われる写像とは, 代数体の各素点ごとに定まる写像を束ねたものであり, 本論文では, ひとつ有限素点を固定したときにでてくる局所評価写像と呼ばれる写像について, ある種の局所定値性を証明した.

以下, K を局所体, すなわち剰余体 $\mathbb{F}$ が有限体であるような完備離散付値体とし, その素元 π をひとつ固定する. X を K 上の固有代数多様体とし, $\mathrm{Br}(X)$ の元 $\mathcal{A}$ をとると, 局所評価写像 $\phi_{\mathcal{A}} : X(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が定義される. また r, r_k は (高次) 還元写像と呼ばれ, $X(K)$ の点の p 進的な近さをはかるものである. このとき, 主要な結果は次のように述べることが出来る.

定理 (Theorem 3.2.1, Theorem 3.4.1). 自然数 n をひとつ固定し, K は 1 の原始 n

乗根を含むとする．X を K 上の非特異固有代数多様体, $\mathcal{X}$ をその固有モデルとする．Q を $\mathcal{X}$ の $\mathbb{F}$-値点で, その像が $\mathcal{X}$ の非特異な点であるものとする．このとき, 次が成り立つ.

(1) n が $p(=\mathbb{F}$ の標数$)$ と互いに素であるとき, X のブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)$ の元で位数が n であるもの $\mathcal{A}$ に対し, 局所評価写像 $\phi_{\mathcal{A}}$ は $r^{-1}(Q)$ 上で, 定値写像となる.

(2) n が p と等しいとき, 体 K から決まるある整数 $k \geq 1$ が存在して, 像が Q であるような $\mathcal{X}$ の $\mathcal{O}_K/(\pi^k)$-値点 Q_k に対して, X のブラウアー群の元で, ${}_p\mathrm{Br}^0_Q(X)$ に含まれるもの $\mathcal{A}$ に対し, 局所評価写像 $\phi_{\mathcal{A}}$ は各 $(r_k)^{-1}(Q_k)$ 上で定値写像となる.

ここで, (2) に現われる ${}_p\mathrm{Br}^0_Q(X)$ は, 詳しい定義はここでは述べないが, ある種の性質を満たす位数が p の元からなる $\mathrm{Br}(X)$ の部分群である．この結果は, 局所評価写像を調べる際に, $X(K)$ に対して議論するところを, $\mathcal{X}(\mathbb{F})$ などの有限集合に関する議論に帰着できるところにその有用性がある.

M. ブライトは, 論文 [B07] において, 局所体に条件をつけない設定の下で, 不分岐拡大や馴分岐拡大で分解するようなブラウアー群の元 $\mathcal{A}$ に対する局所評価写像 $\phi_{\mathcal{A}}$ について, 同様の定値性が成り立つことを示しており, 上記定理は, その結果の類似版, さらには, 上記の拡大では分解しないような元に対しても適用しうる結果であるということが出来る. ただし, ここでは触れないが, その証明の手法は大きく異なったものとなっていることを述べておく.

定理の証明の概略は以下の通りである．まず, $Q \in \mathcal{X}$ での局所環の極大イデアルにおけるヘンゼル化に π^{-1} を添加した環 $\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}[\pi^{-1}]$ を考える．この環のスペクトラムは, 還元写像で Q に落ちてくるような X の K-値点を含んでいる環であることがわかり, これにより, 局所評価写像 $\phi_{\mathcal{A}}$ の定値性を示す議論は, $r(P) = Q$ であるような $P \in X(K)$ から定まるブラウアー群の間の準同型 ${}_n\mathrm{Br}(\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}[\pi^{-1}]) \to {}_n\mathrm{Br}(K)$ が $P \in r^{-1}(Q)$, あるいは $P \in (r_k)^{-1}(Q_k)$ のとり方によらないことを示すことに帰着される.

この主張を示すにあたり, 定理の (1) と (2) において, 異なる手法がとられる．(1) については, 次のブラウアー群の構造決定: ${}_n\mathrm{Br}(\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}[\pi^{-1}]) \cong \mathbb{Z}/n$ が本質的である．これは, 局所化完全系列とガバーの純性定理を利用して, $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}[\pi^{-1}]$ のコホモロジーの計算を特殊ファイバーからくるスペクトラム $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}$ のコホモロジーの計算に帰着させることによって示される.

(2) については, 高次還元写像 r_k による像が一致するような 2 点 P, P' に対しては, それぞれから定まる前述の準同型 ${}_p\mathrm{Br}(\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}[\pi^{-1}]) \to {}_p\mathrm{Br}(K)$ が, 次数 k から定まる, ある部分群の上では一致するということが, ${}_p\mathrm{Br}(\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{X},Q}[\pi^{-1}])$ の元をミルナー K 群のシンボルを用いて表し具体的に計算することにより示すことが出来る．特にこの計算の帰結とし

て, 主張が従う.

謝辞. 本論文を作成するにあたり, 指導教官の斎藤秀司先生には, 修士課程の 2 年間, セミナーでの指導, また数多くの助言と励ましを頂き, 大変お世話になりました. 深く感謝致します. また, 研究が滞っていた昨夏, 研究内容を聞いてくださり, アドバイスいただいた佐藤周友先生にもお礼申し上げます. 最後に, 著者の生活及び研究を, 日々温かく支えてくださった家族, 友人に感謝致します.

参考文献

[B07] M. Bright. Efficient evaluation of the Brauer-Manin Obstruction. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **142**, 2007, 13–23.

[Man70] Yu. I. Manin. Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantinne. In: *Actes du Congrés International des Mathématicients, Nice, 1970*, no. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 401–411.