集合と写像についてのノート *

1　はじめに

高専の本科では, あまり教えられていない (かもしれない) 集合や写像について, その基本的な用語, 記号, 概念など (のうち, この講義を理解するのに必要なもの) をまとめておきます. 基礎的な部分だけでも, きっちりやろうとすれば, 半年くらい, 深みにはまれば, 一生かかるようなテーマでもあるので, あくまでも, 最低限の紹介にとどめます. なお, 本稿作成においては, 『松坂和夫著, 「集合と位相」, 岩波書店 (1968 年)』を参考にしました.

2　集合

2.1　集合とは

「もの」の集まりのことを**集合** といいます. 例えば, 「整数全体の集まり」, 「偶数全体の集まり」「5 より大きく 6 より小さい実数全体の集まり」,「名鉄豊田線の駅全体の集まり」, 「アルファベット全体の集まり」, 「$x+y=1$ をみたすような実数の組 (x,y) の集まり」などがあります.

「もの」の範囲が明確に決まっていることが重要で, 例えば, 「とっても大きい数全体の集まり」, 「美人全体の集まり」などは集合とは言いません. 「とっても大きい」「美人」というだけでは, 人によって, 基準が違うだろうし, はっきりしないからです.

集合は普通, 大文字のアルファベットを用いて表すことが多いです. 集合のなかにはいっている個々の「もの」のことを**元** (または **要素**) と言います. 元は, 小文字のアルファベットを用いて表すことが多いです. 「もの」a が集合 A の元であることを, $a \in A$ (または $A \ni a$) と表し, 「**a は A に含まれる**」「**A は a を含む**」などといいます. 逆に, 「もの」b が集合 A の元でないことは $b \notin A$ のように表します. 例えば, 集合 B を「偶数全体の集まり」とすれば,

$$0 \in B, \quad 100 \in B \quad -3 \notin B$$

などとなります. よく登場する集合には, 固有名詞的に, 記号が与えられているものもあります. 例えば, 「整数全体の集まり」は $\mathbb{Z}$, 「実数全体の集まり」は $\mathbb{R}$, 「複素数全体の集まり」は $\mathbb{C}$ で表されます.

2.2　集合の記法

どんな集合か (その集合にはどんな元が含まれているのか) を書き表すには, 次の 2 通りの方法があります.

- **外延的記法** 集合に含まれる元を中括弧 $\{\ \}$ の中に全て書き並べることによって, 集合を表す. 例えば,
  - 「名鉄豊田線の駅全体の集まり」: { 赤池, 日進, 米野木, 黒笹, 三好ヶ丘, 浄水, 上豊田, 梅坪 } [*1]
  - 「偶数全体の集まり」: $\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$ [*2]

* 線形代数学 (1S) 第 9 講 (2016 年 6 月 3 日) 配布プリント.

[*1] 豊田市駅は名鉄三河線の駅です.

[*2] 元が無限にあるときは, 何が続くのかがわかるようにした上で, 「. . .」 を用いることは許容されます.

のようになります.

- **内包的記法** その集合の元が満たしている条件を表示することで, 集合を表す. $\{x \mid (x$ のみたす条件$)\}$ という形に書く. 例えば,
  - 「5 より大きく 6 より小さい実数全体の集まり」: $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $5 < x < 6\}$ [*3]
  - 「偶数全体の集まり」: $\{n \mid n$ は偶数である $\}$
  - 「$x+y=1$ をみたすような実数の組 (x,y) の集まり」: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$

  のようになります.

2.3 集合の相等, 部分集合

2 つの集合があると, 場合によっては, 「含む」「含まれる」の関係にあることがあります. 2 つの集合 A と B について,

すべての「もの」x に対して,「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つ

とき, $A \subset B$ と書き, 「A は B の**部分集合**である」「**A は B に含まれる**」「**B は A を含む**」などといいます. [*4]
例えば,

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqq x \leqq 5\}$$

という 2 つの集合 A, B を考えると, $A \subset B$ です. また, A には (次節で紹介する空集合も含め) 全部で 8 つの部分集合があります. 全て書き出してみましょう.

とくに, $A \subset B$ であり, かつ, $B \subset A$ であるとき, 言い換えれば, A の中身と B の中身がまったく同じであるとき, $A = B$ とかき, 「**A と B は等しい**」といいます.

$A \subset B$ かつ $B \subset C$ であれば, $A \subset C$ が成り立ちます. 証明してみましょう.

2.4 空集合

ひとつも元を持たない集合 $\{\ \}$ を**空集合** といい, $\emptyset$ で表します. また, どんな集合 A も, 空集合を部分集合として含む, つまり, $\emptyset \subset A$ と約束します.

2.5 和集合, 共通部分, 直積集合

2 つの集合 A と B に対して, 新たに,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

という集合を考えることができます. $A \cap B$ を「A と B の**和集合**」, $A \cap C$ を「A と B の共通部分」と呼びます。例えば, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, B = \{2, 4, 5, 8, 9\}$ とするとき, $A \cup B$ は「A か B, どちらかの元になっているような「もの」の集まり」ですので, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ となります。また, $A \cap B$ は「A にも B にも含まれているような「もの」の集まり」ですので, $A \cap B = \{2, 4\}$ となります。

$A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ が成り立ちます. また同様に, $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ が成り立ちます. また, 次のこともわかります.

命題. (1) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば, $A \cup B \subset C$.
(2) $C \subset A$ かつ $C \subset B$ ならば, $C \subset A \cap B$.

[*3] あるいは $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$, 単に $\{x \mid 5 < x < 6\}$ と書くこともある.
[*4] したがって, とくに, $A \subset A$ です.

証明 (1) のみ示す．任意に $x \in A \cup B$ をとったときに, $x \in C$ であることを示せば良い．和集合の定義より, $x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ．$x \in A$ とすると, 仮定 $A \subset C$ より, $x \in C$ であることがわかる．また, $x \in B$ とすると, 仮定 $B \subset C$ より, $x \in C$ となる．以上より, $A \cup B \subset C$ がわかった．□

2 つの集合 A と B に対して, もうひとつ,「A の元と B の元の組」を元として持つような集合

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \quad b \in B\}$$

を考えることができます．これを A と B の**直積 (集合)** と呼びます．代表例としては, 座標平面 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ と書くことが多い) があります．

以上の和集合, 共通部分, 直積集合については, 2 つでなく, 一般に n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n, \quad A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

のようなものも, 同様に定義することができます．

3　写像

3.1　写像とは

2 つの集合 A と B に対して, A から B への写像とは, A の各元 a に対して, 何らかの B の元 b を対応させるものをいいます．写像は $f, g, h, \ldots$ を始めとしてアルファベットなどで表されることが多いです。通常, $f\colon A \to B$ (または, $A \xrightarrow{f} B$) のように表されます．このとき, A を f の**定義域**, B を f の**終域** といい, $a \in A$ に対応する B の元 b を 記号 $f(a)$ で表し,「f **による** a **の像**」といいます．f により, $a \in A$ が $b \in B$ に写されることを $f\colon a \mapsto b$ のようにも書きます．

例 1 (1) 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し, その 2 乗 $x^2 \in \mathbb{R}$ を対応させる写像*5を $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とすれば, $g(-\sqrt{5}) = 5$.

(2) 実数の組 (x, y) に対し, 実数の組 $(x + y, 3x)$ を対応させる写像*6 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し, $h(2, 3) = (5, 6)$.

(3) 実数の組 (x, y) に対し, 実数 xy を対応させる写像 $m\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *7 に対し, $m(3, -2) = -6$.

(4) $M = \{x \mid x$ は名鉄豊田線の駅 $\}$ の元 s に対し, 豊田市駅からの運賃 (円) $F(s)$ を対応させる写像を $F\colon M \to \mathbb{R}$ とすれば, $F($三好ヶ丘$) = 340$.

3.2　像と逆像

写像 $f\colon A \to B$ が与えられると, そこから, 新たにいくつかの集合を考えることができます。まず, A の部分集合 C に対して, $\{f(a) \mid a \in C\}$ を $f(C)$ で表し,「f **による** C **の像**」といいます．$f(C)$ は B の部分集合になります．とくに, $C = A$ のときは, $f(A)$ のほか, $\mathrm{Im}(f)$ ともかき, f の**値域**といいます．*8

また, $D \subset B$ に対して, 集合 $\{a \in A \mid f(a) \in D\}$ を $f^{-1}(D)$ とかき,「f による D の逆像」とよびます．とくに, $b \in B$ として, D が 1 元集合 $\{b\}$ のとき, $f^{-1}(\{b\})$ を単に, $f^{-1}(b)$ とかき,「f による b の逆像」とよびます．$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ です．

例 2 (1) **例 1** の $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $g^{-1}(1) = \{1, -1\}$ である．(2 乗して 1 になる実数は, 1 と -1 に限る.)

(2) 一方で, $g^{-1}(-5) = \emptyset$ である．(2 乗して -5 になるような実数はひとつも存在しない.)

(3) $C = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, D = \{(x, y) \mid y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$ とするとき, **例 1** の h: に対して, $h(C) = D$ である．*9

---

*5 このように, 終域が $\mathbb{R}$ である写像のことを (実) **関数** といいます．いままで, 関数とよんできたものは, 写像の特別な場合になります．

*6 講義で扱うように, この写像はとくに, **線形写像** と呼ばれる特別な性質を持つ写像のひとつです．

*7 この写像を $\mathbb{R}$ の乗法とよぶ．

*8 教科書では, 終域のことを 値域とよんでいるが, 正式な用語ではないように思う．

*9 集合が等しくなることをきちんと示すには, 定義に戻って, $h(C) \subset D$ と $D \subset h(C)$ を示すことになる．次の例 (4) については, 厳密な証明を書いたので, それを参考にして, $h(C) = D$ を示してみよう．

(4) 0 以上の実数からなる集合を $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とかくと, **例 1** の g に対して, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ になる.

証明. 「集合が等しい」ということの定義から, $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset g(\mathbb{R})$ を示せばよい.

$\underline{g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ について}}$ 任意に $y \in f(\mathbb{R})$ をとると, 像の定義より, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $g(x) = y$ とかける. g の定義より, $y = x^2$ ということ. ここで, 実数の 2 乗は常に 0 以上, つまり, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の元となるので, $y = x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ となる. よって, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ が分かった.

$\underline{\mathbb{R}_{\geq 0} \subset g(\mathbb{R}) \text{ について}}$ 任意に $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ をとる. 示すべきことは $y \in g(\mathbb{R})$, つまり, ある実数 x が存在して, $g(x) = y$ となることである. ここで, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の定義から $y \geq 0$ であるから, $\sqrt{y}$ は実数であり, したがって, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ ととれば, これは, $g(x) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ をみたす. よって, $y \in g(\mathbb{R})$ がわかり, $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset g(\mathbb{R})$ が示せた.

以上より, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ が分かった. □

3.3 全射と単射

写像 $f\colon A \to B$ を考える. $\mathrm{Im}(f) = B$ のとき, 言い換えれば, B のどんな元 b に対しても $f(a) = b$ となるような $a \in A$ が存在するとき, f は全射であるという. f が全射ということは, 「任意の $b \in B$ に対して, その逆像 $f^{-1}(b)$ は空集合ではない」ということの言い換えでもある.

また, どんな A の 2 元 a, a' に対しても,「$f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$」となるとき, f は単射であるという. この条件は, 「$a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$」, つまり, 「違う元は, 同じところには写らない」ということと同じである. 単射であれば, $b \in \mathrm{Im}(f)$ に対して, その逆像 $f^{-1}(b)$ は 1 元からなる集合である.

例えば, **例 1** の $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全射でも単射でもない. **例 2** の (1), (2) で考えたことを元に確認してみよう.

また, **例 1** の $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は単射である. 実際, 任意の $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $h(a, b) = h(c, d)$ とすれば, $(a + b, 3a) = (c + d, 3c)$ であるので, 第 2 成分を比較して, $a = c$, このとき, 第 1 成分を比較して, $b = d$ が分かるので, $(a, b) = (c, d)$ が成り立つ. (実は h は全射でもある. 証明してみよう.)

$f\colon A \to B$ が全射であり, 単射でもあるときには, f は全単射である, という. 例えば, 集合 A から集合 A への写像で a をまた a に写す (, 要するに何も動かさない) 写像を A の恒等写像といい, $1_A\colon A \to A$ で表します. 1_A は全単射になります. また, 上に述べたように, **例 1** の $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ も全単射の例である.

3.4 合成写像と逆写像

2 つの写像 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ に対して, f と g の**合成写像** $g \circ f\colon A \to C$ が $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ によって, 定義されます. $f(a) \in B$ なので, ちゃんと $g(f(a))$ が考えられることに注意してください. 例えば, **例 1** の $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は合成できて, 合成写像 $m \circ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定めます. 具体的に計算してみると, 写像 $m \circ h$ は $(m \circ h)(x, y) = 3x(x + y)$ というものであることがわかります.

また, $f\colon A \to B$ を全単射とすると, どんな B の元 b に対しても, $f(a) = b$ となる a がただひとつ必ず存在するので, 新しく, B から A への写像を 対応 $b \mapsto a$ により定めることができます. この写像を f の**逆写像**といい, $f^{-1}\colon B \to A$ とかきます. f^{-1} もまた全単射になることに注意してください. また, 作り方から, $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ であり, $f \circ f^{-1} = 1_B$ であり, また $f^{-1} \circ f = 1_A$ となります.

例えば, **例 1** の写像 h は全単射であり, 次で定まる逆写像を持つことがわかります:

$$h^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto (\frac{1}{3}y, x - \frac{1}{3}y)$$

$h \circ h^{-1} = 1_{\mathbb{R}^2}$, $h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}^2}$ であることを具体的に確かめてみましょう.