

線形代数学 (1S) 課題6 (20 年 月 日出題)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 () 番号 () 氏名 ()

注意1. 答えだけでなく途中式や説明も残してください。式の羅列や答えのみのものは課題点を与えません。

2. 次回の講義のはじめに提出してください。

問題 1.

行列式の性質を利用して, 次の等式 (van der Monde の行列式) を示せ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(x-w)(y-z)(y-w)(z-w).$$

線形代数学 (1S) 課題6 解答 (20 年 月 日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 () 番号 () 氏名 ()

解答 1.

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{array} \right| \xrightarrow{[2]+[1]\times(-1), [3]+[1]\times(-1), [4]+[1]\times(-1)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x & w-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 & w^2-x^2 \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 & w^3-x^3 \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{ccc} y-x & z-x & w-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 & w^2-x^2 \\ y^3-x^3 & z^3-x^3 & w^3-x^3 \end{array} \right| \\
 &= (y-x)(z-x)(w-x) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ y+x & z+x & w+x \\ y^2+yx+x^2 & z^2+zx+x^2 & w^2+wx+x^2 \end{array} \right| \\
 & \xrightarrow{[2]+[1]\times(-1), [3]+[1]\times(-1)} (y-x)(z-x)(w-x) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ y+x & z-y & w-y \\ y^2+yx+x^2 & z^2-y^2+zx-yx & w^2-y^2+wx-yx \end{array} \right| \\
 &= (y-x)(z-x)(w-x) \left| \begin{array}{cc} z-y & w-y \\ z^2-y^2+zx-yx & w^2-y^2+wx-yx \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 z^2 - y^2 + zx - yx &= (z-y)(z+y) + (z-y)x = (z-y)(x+y+z) \\
 w^2 - y^2 + wx - yx &= (w-y)(w+y) + (w-y)x = (w-y)(x+y+w)
 \end{aligned}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
 &= (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y) \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x+y+z & x+y+w \end{array} \right| \\
 &= (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z) \\
 &= (x-y)(x-z)(x-w)(y-z)(y-w)(z-w)
 \end{aligned}$$

となる. よって示された. □

コメント

- よく出来ていました。行基本変形しか使っていない人もいましたが、適宜楽な方を選びましょう。例えば,

$$(y-x)(z-x)(w-x) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ y+x & z+x & w+x \\ y^2+yx+x^2 & z^2+zx+x^2 & w^2+wx+x^2 \end{array} \right|$$

からの変形 (3~4 行目) で, ② + ① × (- (y + x)), ③ + ① × (- (y² + yx + x²)) をしている人がいましたが, これは計算ミスなどにつながります。

- できるようになってもらうことが目標ですので, 周りの人や私に相談したり, 互いに議論して教え合ったりするのは全く構いませんが, 単に写すなどのいい加減なことはやめましょう。全く理解不能な式変形が全く同じように現れている人がちらほらいました。