線形代数学 (1S) 課題4.5 (20　年　月　日出題)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　　) 番号 (　　　) 氏名　(　　　　　　　　　　　　　　　　)

注意1. 答えだけでなく途中式や説明も残してください. 式の羅列や答えのみのものは課題点を与えません.
2. 次回の講義のはじめに提出してください.

問題 1. 次の同次連立一次方程式の基本解を求めよ.

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z + 3w - t = 0 \\ -2x + 5y + 2z - 2t = 0 \\ x - 2y + 3w + t = 0 \\ 3x - 7y - 2z + 2w + 3t = 0 \end{cases}$$

線形代数学 (1S) 課題4.5 解答 (20　年　月　日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名 (　　　　　　　　)

解答 1. 拡大係数行列 $\tilde{A}$ を基本変形して, $\tilde{A}$ を簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+①\times 2, ③+①\times(-1), ④+①\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\times 3, ③+②\times(-1), ④+②\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\leftrightarrow④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\times 3, ③+②\times(-1), ④+②\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 解の自由度は $5 - \operatorname{rank} \tilde{A} = 2$ である. 第 3 行より $w = 0$ である. また, $z = c_1, \quad t = c_2$ とおけば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4c_1 - c_2 \\ -2c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので, 基本解としては, 例えば,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる.

(裏に続く)

- 基本解とは, その連立方程式のすべての解を作り出せるような (最小個数の) ベクトルたちのことです.
  なので, 答えを, 単に一般解を書いているだけのものは不適切です。きちんとベクトルを 2 本書き並べられていない人が散見されました. また,
  $$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  のように, 一本だけなのもダメです. 実際, このベクトルを何倍しても,
  $$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  という解は作ることができません. 逆に,
  $$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  もダメです. すべての解を 1 次結合で書き表すには, これらのうちのどれか 2 本あれば十分で, 3 本も必要ないからです.
  以上からわかるように, 基本解のベクトルの本数は, その連立方程式の解の自由度に一致します.
- 行基本変形を
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  でやめている人がいました. この行列は階段行列ではありません. rank の定義は, 階段行列の階段の段の数として定義したことに注意してください. 最低限,
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  までは変形しましょう. 15 や 6 は 0 にしなくても階段行列なので, 構いませんが, 講義でも述べたように, どのみち連立方程式を解くことになるのですから, いまのうちに 0 にしておいたほうが後の計算が簡単になります.