線形代数学 (1S) 課題 2 (20　　年　　月　　日出題)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　　) 番号 (　　　) 氏名　(　　　　　　　　　　　　　　　　)

注意1. 答えだけでなく途中式や説明も残してください. 式の羅列や答えのみのものは課題点を与えません.
2. 次回の講義のはじめに提出してください.

問題 1. (1) 次の連立一次方程式を行列の基本変形を用いて解け[*1]. 各ステップの変形内容を記すこと. 例えば, 「A の第 4 行の 2 倍を第 1 行に加えて, A' にする」という変形は $A \xrightarrow{①+④\times 2} A'$ のように記せ.

$$\begin{cases} 2x + 7y &= 3 \\ x + 4y &= 1 \end{cases}$$

(2) (1) の第 k ステップに対応する基本行列 P_k を求めよ.

[*1] ここでは, 「解く」とは, 拡大係数行列を行基本変形により変形して, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ の形にすることをいうものとする.

(3) (2) で求めた P_k たちの積 $P = P_N P_{N-1} \cdots P_2 P_1$ を求めよ．ここで, N は変形ステップの総数とする．

(4) 拡大係数行列 $\tilde{A}$ に左から P を掛けて, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ の形になることを確かめよ．

線形代数学 (1S) 課題 2 解答 (20　年　月　日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名　(　　　　　　　　　　)

解答 1. (1) 拡大係数行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ である. したがって,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{①+②\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり, $x = 5, y = -1$ である.

(2) 第 1 ステップは, 第 1 行と第 2 行の入れ替えであるから,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 2 ステップは, 第 1 行の (-2) 倍を第 2 行に加えるので,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 3 ステップは, 第 2 行を (-1) 倍するので,

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 4 ステップは, 第 2 行の (-4) 倍を第 1 行に加えるので,

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$P = P_4P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(注意. 実は, これは A の逆行列に他ならない.)

(4)

$$P\tilde{A} = P(A \mid \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となり, 確かに (1) の解が出てくることが確かめられる.

(注意. これは連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に順番に基本変形 P_1, P_2, P_3, P_4 を行って連立方程式を解くことにほかならず, これらの変形をまとめて行う (=P を左からかける) というのは, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に左から A^{-1} を掛けて, $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ と解くことにほかならない.)

コメント

- 今さらではありますが, この講義では, 行列の第 i 行を $ⓘ$ で表すことにします. まだ出てきていないですが, 第 j 列は $[j]$ で表すことにします.
- よく出来ていました. 人によって, 変形の順番は異なっていても, (3) の行列 P は等しくなります. あえて違う変形をして, それでも同じになることを確かめてみましょう.
  (とはいえ, 基本的には, 第 1 列から初めて, 対角成分を 1 に, それから, その列の他の成分を 0 にする, という手順をオススメします.)