線形代数学 (1S) 課題10 (20　年　月　日出題)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名　(　　　　　　　　)

注意1. 答えだけでなく途中式や説明も残してください. 式の羅列や答えのみのものは課題点を与えません.

2. 次回の講義のはじめに提出してください.

問題 1. 次の集合 W は与えられた線形空間 V の部分空間になるか. なる場合は証明し, ならない場合はその理由を述べよ.

(1) $V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ の部分集合 $W = \{f(x) \in V \mid f(0) = 0\}$

(2) $V = \mathbb{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y - z = 0 \right\}$

裏に続く

(3) $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

線形代数学 (1S) 課題10 解答 (20　年　月　日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名 (　　　　　　　　)

解答 1.

(1) 部分空間になる.

証明. 任意の $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in W$ をとる. 仮定より, $f(0) = d = 0, g(0) = d' = 0$ である. このとき,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (a+a')x^3 + (b+b')x^2 + (c+c')x + (d+d')$$

について, $(f+g)(0) = d + d' = 0$ となるので, $(f+g)(x) \in W$ である.

また, 任意の $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$ と 任意の $r \in \mathbb{R}$ をとる. 仮定より, $f(0) = d = 0$ である. このとき

$$(rf)(x) = rf(x) = rax^3 + rbx^2 + rcx + rd$$

について, $(rf)(0) = rd = 0$ となるので, $(rf)(x) \in W$ である.

以上より, $W \subset V$ は和とスカラー倍に関して閉じているので, V の部分空間となる. □

(2) 部分空間になる.

証明. 任意の $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in W$ をとる. 仮定より, $x + 2y - z = 0, x' + 2y' - z' = 0$ である. このとき,

$$(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

について,

$$(x+x') + 2(y+y') - (z+z') = (x+2y-z) + (x'+2y'-z') = 0$$

となるので, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$ である.

また, 任意の $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$ と任意の $r \in \mathbb{R}$ をとる. 仮定より, $x + 2y - z = 0$ である. このとき,

$$r\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

について, $rx + 2ry - rz = r(x + 2y - z) = 0$ となるので, $r\boldsymbol{a} \in W$ である.

以上より, $W \subset V$ は和とスカラー倍に関して閉じているので, V の部分空間となる. □

(3) 部分空間にならない. 実際, $V = \mathbb{R}^2$ の零ベクトル $\boldsymbol{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとったとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となるので, $\boldsymbol{o} \notin W$ である. したがって, $W \subset V$ は V の部分空間にはならない.

(裏に続く)

- 「任意」という言葉を「自分が好き勝手に (任意に)1 つ選んできた元について考える」というように勘違いしている答案が散見されました. ここでの意味は, 「どんな (任意の) 元に対しても, 〜が成り立つ」という意味です. なので, 具体的に $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x$ に対して云々を議論しても, **部分空間であること**は証明できません.
- 一方, **部分空間でないこと** を示すのであれば, 特定の元に対して成り立たないこと (反例があること) を示せば良いので, このような議論で, 証明が可能です.
- 証明すべきことは「部分空間であるかないか」です. 「よって, W は V の部分集合である」などとしていた人は気をつけましょう. (部分集合であることは問題にかいてあります.)
- (1) の W の元は, 問題の通り, $f(x) = ax^3 + bx + cx + d$ という多項式 (のうちで, 特別な性質をもつもの) です. 普段考えるようなベクトルが元ではないので, 注意してください.
- 単に「任意に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をとる」としている答案がありました. これでは, V の元をとったのか, W の元をとったのか, それとも全然関係ない記号 $\boldsymbol{a}$ をとったのか全くわかりません.
  重要なのは, 「W から元をとる」ということですので, きちんと明記してください.