線形代数学 (1S) 課題1 (20　年　月　日出題)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　　) 番号 (　　　) 氏名 (　　　　　　　　　　　　　　)

注意1. 答えだけでなく途中式や説明も残してください. 式の羅列や答えのみのものは課題点を与えません.

2. 次回の講義のはじめに提出してください.

問題 1. 次の行列のうち, 2 つの行列 (同じものでも良い) の積が定義されるものの積をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 2. 次の主張は正しいか. 正しい場合には証明を, 正しくない場合には, そのことを反例をあげて説明せよ.

(1) どんな 2 次正方行列 A と B に対しても, $AB = O$ であれば, $A = O$ か $B = O$ である.

(2) どんな 2 次正方行列 A と B に対しても, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成り立つ.

問題 3. 転置行列, 逆行列とはなにか, 説明せよ. また, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, その転置行列と逆行列を求めよ.

線形代数学 (1S) 課題1 解答 (20　年　月　日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名 (　　　　　　　　)

解答 1. 行列の積 XY は X の列の数と, Y の行の数が等しいときのみ定義される. したがって,

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 10 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad CC = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 6 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

解答 2.

(1) 正しくない. 実際,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば, $A \neq O, B \neq O$ であるが, 積 $AB = O$ である. (これ以外にも反例は無数にある)

(2) 正しくない. 実際,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ である. (これ以外にも反例は無数にある)

解答 3

- $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し, A の転置行列 ${}^tA$ とは, A の行と列を入れ替えて得られる行列, すなわち, $n \times m$ 行列であって, 第 (i,j) 成分が a_{ji} であるもの.
- n 次正方行列 A に対して, A の逆行列とは, n 次正方行列 X であって, $AX = XA = E$ を満たすもののこと (ここに E は n 次単位行列). 常に存在するわけではないが, 存在すれば, ただひとつであり, 記号 A^{-1} で表される.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 5 \cdot 2}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 5/7 \\ 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}.$$

である.

コメント

- 問題 1 については, AB が考えられていない人が多かったです.
- 問題 2(1) 零行列 O と 行列式 0 を混同しているような答案がありました. あと, 何を示すべきかわかっていない答案がありました。正しくないことを示すのでしたら, 「零行列でない 2 次正方行列 A と B であって, $AB = O$ となるものをひとつ見つける」ことになります.
  問題 2(2) 多くの方が指摘されていたように, 等式 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成り立つための必要十分条件は $AB = BA$ であることです. 一般に行列の積は非可換なので, そのことを示せばよいのですが, 「反例をあげて」とあるので, ひとつ具体的な例を挙げてください.
- 2 次正方行列に限って, 説明をしているものがちらほらありました. 一般的な状況で説明すべきです. また, 逆行列を説明するときに, 「正方行列 A に対して, $AX = E$ となる行列 X のこと」と正方行列に対して存在す

るものであることを明記すべきです．実際，

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ですが，$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ である，ということはありません．条件式を $AX = XA = E$ と書いてくださった方は，この式から，A が正方行列ということも出てくるので，許容しています．