応用解析学 II 第 9 講の補足

2016 年 11 月 28 日

- 複素積分を用いた実積分 (とくに広義積分) の計算においては, しばしば, 不要な部分を消すための「複素積分の評価」というものが必要になります. ここでは, 次の定理を紹介しておきます. なお, 以下の議論は, 教科書「明解 複素解析」(長崎・山根・横山著, 培風館) の p.27, 51 を参考にしています.

定理 C を複素平面上の曲線とし, $f(z)$ を C を含む領域上で定義されている複素関数とする. L を曲線 C の長さとする. ある正定数 M があって, C 上において不等式 $|f(z)| \leq M$ が成り立つとき, 複素積分 $\int_C f(z)dz$ について次が成り立つ:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML.$$

証明のためには, 次の補題が必要となる:
補題 区間 $[\alpha, \beta]$ で定義された実変数複素数値関数 $g(t)$ に対し,

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |g(t)|dt.$$

まず, この補題は認めて, 定理を証明しよう. 複素積分の定義より, 曲線 C のパラメータ表示 $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ をとったとき,

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt\right|$$

ここで, $f(z(t))z'(t)$ に対して補題を適用すると

$$\begin{aligned} &\leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))z'(t)|dt \\ &= \int_\alpha^\beta |f(z(t))||z'(t)|dt \end{aligned}$$

C 上で $|f(z)| \leq M$ であることから

$$\begin{aligned} &\leq \int_\alpha^\beta M|z'(t)|dt \\ &= M\int_\alpha^\beta |z'(t)|dt \end{aligned}$$

ここで, $z(t) = x(t) + iy(t)$ と書けば, $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ であるから

$$\begin{aligned} &= M\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \\ &= ML. \text{ (曲線の長さの定義式) } \square \end{aligned}$$

それでは, 補題を証明しよう. 改めて主張を述べておく:

補題 区間 $[\alpha, \beta]$ で定義された実変数複素数値関数 $g(t)$ に対し,

$$\left| \int_\alpha^\beta g(t)dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |g(t)|dt.$$

<u>補題の証明</u> $g(t)$ の絶対値を $r(t)$, 偏角を $\phi(t)$ とする. $r(t)$, $\phi(t)$ は実関数である. また, 複素数 $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)dt$ の絶対値を R, 偏角を θ とする. このとき,

$$\begin{aligned} R &= e^{-i\theta} \int_\alpha^\beta g(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta g(t)e^{-i\theta}dt \\ &= \int_\alpha^\beta r(t)e^{i(\phi(t)-\theta)}dt \\ &= \int_\alpha^\beta r(t)\cos(\phi(t)-\theta)dt + i\int_\alpha^\beta r(t)\sin(\phi(t)-\theta)dt \end{aligned}$$

となるので, 両辺の実部と虚部を比べて,

$$R = \int_\alpha^\beta r(t)\cos(\phi(t)-\theta)dt$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta g(t)dt \right| (= R) &= \int_\alpha^\beta r(t)\cos(\phi(t)-\theta)dt \\ &\leq \int_\alpha^\beta |r(t)\cos(\phi(t)-\theta)|dt \\ &\leq \int_\alpha^\beta |r(t)|dt \\ &= \int_\alpha^\beta |g(t)|dt. \ \square \end{aligned}$$