応用解析学 II 第 4 講の補足

2016 年 11 月 30 日

- 第 4 講で次のような積分を扱いました:

$$\int_0^1 (t^2+i)^4 \cdot 2tdt.$$

気持ちとしては, $z = t^2 + 1$ とおくと[*1], $dz = 2tdt$ で, 積分区間が $t : 0 \to 1$ から $z : i \to 1+i$ に変わるので,

$$\int_i^{1+i} z^4 dz \text{ とでもかくべきもの} = \left[\frac{1}{5}z^5\right]_i^{1+i} = \frac{1}{5}(1+i)^5 - \frac{1}{5}i^5 = \cdots$$

というような計算をしてもまあ構わないと曖昧な表現をしました. 言葉を濁した理由は, 本日の内容と深く関わってきます. 実変数で定積分をする場合には, 積分区間を $[0,1]$ とすれば, これは, 「数直線上の 0 から 1 まで」として, 意味がただ一通りに決まりますが, 複素変数の世界で定積分をする場合には, $[i, 1+i]$ というのは, 確定した意味を持ちません (したがって, このような書き方をすることもありません). なぜなら, 複素積分においては, 積分区間に当たるものは, 複素平面上の曲線ですので, **始点が i, 終点が $1+i$ というだけでは曲線がひとつに決まらない**からです. そして, 曲線が変わってくれば, 積分の計算結果も変わってきます.

実は, 第 6 講で扱う予定ですが, **「多項式関数の複素積分は, 始点と終点がきまると, どんな曲線に沿って積分しても, 計算結果が変わらない」**という, 不思議な (そしてとても重要な) 結果があります。この結果を踏まえた上ではじめて, 上に書いた

$$\int_i^{1+i} z^4 dz$$

という表現は意味を持つのです. こういったことを踏まえると, **実変数複素数値関数の積分において, むやみに置換積分をしてはいけない**ことがわかります. たとえば, 次のような例を見てみましょう。

$$(1) \quad \int_0^\pi \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = \int_0^\pi idt = \pi i,$$
$$(2) \quad \int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}} \cdot (-ie^{-it}) dt = \int_0^\pi -idt = -\pi i$$

(1) の最左辺は, $z = e^{it}$ と置き換えると, $dz = ie^{it}dt$, $z : 1 \to -1$ ですので,

$$\int_0^\pi \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = \int_1^{-1} \frac{1}{z} dz$$

となります。同様に, (2) の最左辺は, $z = e^{-it}$ と置き換えると, $dz = -ie^{-it}dt$, $z : 1 \to -1$ ですので,

$$\int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}} \cdot (-ie^{-it}) dt = \int_1^{-1} \frac{1}{z} dz$$

となります。なので, この置換 (というよりは, $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{1}{z} dz$ という表し方) が正しいとすれば, 2 つの積分は同じものになるはずですが, (1) は πi, (2) は $-\pi i$ が正しい答ですので, うまくいかないことがわかります。

[*1] 講義では s と書いていましたが, 複素数らしくするために, z にしたいと思います。