

集合と写像についてのノート*

1 はじめに

高専の本科では、あまり教えられていない(かもしれない)集合や写像について、その基本的な用語、記号、概念など(のうち、この講義を理解するのに必要なもの)をまとめておきます。基礎的な部分だけでも、きっちりやろうとすれば、半年くらい、深みにはまれば、一生かかるようなテーマでもあるので、あくまでも、最低限の紹介にとどめます。なお、本稿作成においては、『松坂和夫著、「集合と位相」、岩波書店(1968年)』を参考にしました。

2 集合

2.1 集合とは

「もの」の集まりのことを**集合**といいます。例えば、「整数全体の集まり」、「偶数全体の集まり」「5より大きく6より小さい実数全体の集まり」、「名鉄豊田線の駅全体の集まり」、「アルファベット全体の集まり」、「 $x+y=1$ をみたすような実数の組 (x,y) の集まり」などがあります。

「もの」の範囲が明確に決まっていることが重要で、例えば、「とっても大きい数全体の集まり」、「美人全体の集まり」などは集合とは言いません。「とっても大きい」「美人」というだけでは、人によって、基準が違ってしまう、はっきりしないからです。

集合は普通、大文字のアルファベットを用いて表すことが多いです。集合のなかにはいつている個々の「もの」のことを**元**(または**要素**)と言います。元は、小文字のアルファベットを用いて表すことが多いです。「もの」 a が集合 A の元であることを、 $a \in A$ (または $A \ni a$)と表し、「 a は A に含まれる」「 A は a を含む」などと言います。逆に、「もの」 b が集合 A の元でないことは $b \notin A$ のように表します。例えば、集合 B を「偶数全体の集まり」とすれば、

$$0 \in B, \quad 100 \in B \quad -3 \notin B$$

などとなります。よく登場する集合には、固有名詞的に、記号が与えられているものもあります。例えば、「整数全体の集まり」は \mathbb{Z} 、「実数全体の集まり」は \mathbb{R} 、「複素数全体の集まり」は \mathbb{C} で表されます。

2.2 集合の記法

どんな集合か(その集合にはどんな元が含まれているのか)を書き表すには、次の2通りの方法があります。

- **外延的記法** 集合に含まれる元を中括弧 $\{ \}$ の中に全て書き並べることによって、集合を表す。例えば、
 - 「名鉄豊田線の駅全体の集まり」: $\{ \text{赤池, 日進, 米野木, 黒笹, 三好ヶ丘, 浄水, 上豊田, 梅坪} \}$ *¹
 - 「偶数全体の集まり」: $\{ 0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots \}$ *²

* 線形代数学(2015年前期, 1DKJ) 第11講(2014年6月22日)配布プリント。

*¹ 豊田市駅は名鉄三河線の駅です。

*² 元が無限にあるときは、何が続くのかわかるようにした上で、「 \dots 」を用いることは許容されます。

のようになります。

- **内包的記法** その集合の元が満たしている条件を表示することで、集合を表す。 $\{x \mid (x \text{ のみたす条件})\}$ という形に書く。例えば、
 - 「5 より大きく 6 より小さい実数全体の集まり」： $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 5 < x < 6\}$ *3
 - 「偶数全体の集まり」： $\{n \mid n \text{ は偶数である}\}$
 - 「 $x + y = 1$ をみたすような実数の組 (x, y) の集まり」： $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$のようになります。

2.3 集合の相等, 部分集合

2つの集合があると、場合によっては、「含む」「含まれる」の関係にあることがあります。2つの集合 A と B について、

すべての「もの」 x に対して、「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つ

とき、 $A \subset B$ と書き、「 A は B の**部分集合**である」「 A は B に**含まれる**」「 B は A を**含む**」などといいます。*4
例えば、

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

という2つの集合 A, B を考えると、 $A \subset B$ です。また、 A には (次節で紹介する空集合も含め) 全部で8つの部分集合があります。全て書き出してみましょう。

とくに、 $A \subset B$ であり、かつ、 $B \subset A$ であるとき、言い換えれば、 A の中身と B の中身がまったく同じであるとき、 $A = B$ とかき、「 A と B は**等しい**」といいます。

$A \subset B$ かつ $B \subset C$ であれば、 $A \subset C$ が成り立ちます。証明してみましょう。

2.4 空集合

ひとつも元を持たない集合 $\{\}$ を**空集合** といい、 \emptyset で表します。また、どんな集合 A も、空集合を部分集合として含む、つまり、 $\emptyset \subset A$ と約束します。

2.5 和集合, 共通部分, 直積集合

2つの集合 A と B に対して、新たに、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

という集合を考えることができます。 $A \cap B$ を「 A と B の**和集合**」、 $A \cap C$ を「 A と B の**共通部分**」と呼びます。例えば、 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 8, 9\}$ とするとき、 $A \cup B$ は「 A か B , どちらかの元になっているような「もの」の集まり」ですので、 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ となります。また、 $A \cap B$ は「 A にも B にも含まれているような「もの」の集まり」ですので、 $A \cap B = \{2, 4\}$ となります。

$A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ が成り立ちます。また同様に、 $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ が成り立ちます。また、次のこともわかります。

命題. (1) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば、 $A \cup B \subset C$.

(2) $C \subset A$ かつ $C \subset B$ ならば、 $C \subset A \cap B$.

*3 あるいは $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$, 単に $\{x \mid 5 < x < 6\}$ と書くこともある。

*4 したがって、とくに、 $A \subset A$ です。

証明 (1) のみ示す. 任意に $x \in A \cup B$ をとったときに, $x \in C$ であることを示せば良い. 和集合の定義より, $x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ. $x \in A$ とすると, 仮定 $A \subset C$ より, $x \in C$ であることがわかる. また, $x \in B$ とすると, 仮定 $B \subset C$ より, $x \in C$ となる. 以上より, $A \cup B \subset C$ がわかった. \square

2つの集合 A と B に対して, もうひとつ, 「 A の元と B の元の組」を元として持つような集合

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

を考えることができます. これを A と B の**直積 (集合)** と呼びます. 代表例としては, 座標平面 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (\mathbb{R}^2 と書くことが多い) があります.

以上の和集合, 共通部分, 直積集合については, 2つでなく, 一般に n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n に対して,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \quad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

のようなものも, 同様に定義することができます.

3 写像

3.1 写像とは

2つの集合 A と B に対して, A から B への写像とは, A の各元 a に対して, 何らかの B の元 b を対応させるものをいいます. 写像は f, g, h, \dots を始めとしてアルファベットなどで表されることが多いです. 通常, $f: A \rightarrow B$ (または, $A \xrightarrow{f} B$) のように表されます. このとき, A を f の**定義域**, B を f の**終域** といい, $a \in A$ に対応する B の元 b を記号 $f(a)$ で表し, 「 f による a の像」といいます. f により, $a \in A$ が $b \in B$ に写されることを $f: a \mapsto b$ のようにも書きます.

例 1 (1) 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し, その 2 乗 $x^2 \in \mathbb{R}$ を対応させる写像^{*5}を $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とすれば, $g(-\sqrt{5}) = 5$.

(2) 実数の組 (x, y) に対し, 実数の組 $(x + y, 3x)$ を対応させる写像^{*6} $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対し, $h(2, 3) = (5, 6)$.

(3) 実数の組 (x, y) に対し, 実数 xy を対応させる写像 $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ^{*7} に対し, $m(3, -2) = -6$.

(4) $M = \{x \mid x \text{ は名鉄豊田線の駅}\}$ の元 s に対し, 豊田市駅からの運賃 (円) $F(s)$ を対応させる写像を $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ とすれば, $F(\text{三好ヶ丘}) = 340$.

3.2 像と逆像

写像 $f: A \rightarrow B$ が与えられると, そこから, 新たにいくつかの集合を考えることができます. まず, A の部分集合 C に対して, $\{f(a) \mid a \in C\}$ を $f(C)$ で表し, 「 f による C の像」といいます. $f(C)$ は B の部分集合になります. とくに, $C = A$ のときは, $f(A)$ のほか, $\text{Im}(f)$ とかき, f の**値域**とといいます. ^{*8}

また, $D \subset B$ に対して, 集合 $\{a \in A \mid f(a) \in D\}$ を $f^{-1}(D)$ とかき, 「 f による D の逆像」とよびます. とくに, $b \in B$ として, D が 1 元集合 $\{b\}$ のとき, $f^{-1}(\{b\})$ を単に, $f^{-1}(b)$ とかき, 「 f による b の逆像」とよびます. $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ です.

例 2 (1) **例 1** の $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $g^{-1}(1) = \{1, -1\}$ である. (2 乗して 1 になる実数は, 1 と -1 に限る.)

(2) 一方で, $g^{-1}(-5) = \emptyset$ である. (2 乗して -5 になるような実数はひとつも存在しない.)

(3) $C = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $D = \{(x, y) \mid y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$ とするとき, **例 1** の h : に対して, $h(C) = D$ である. ^{*9}

^{*5} このように, 終域が \mathbb{R} である写像のことを (実) **関数** といいます. いままで, 関数とよんできたものは, 写像の特別な場合になります.

^{*6} 講義で扱うように, この写像はとくに, **線形写像** と呼ばれる特別な性質を持つ写像のひとつです.

^{*7} この写像を \mathbb{R} の乗法とよぶ.

^{*8} 教科書では, 終域のことを 値域とよんでいるが, 正式な用語ではないように思う.

^{*9} 集合が等しくなることをきちんと示すには, 定義に戻って, $h(C) \subset D$ と $D \subset h(C)$ を示すことになる. 次の例 (4) については, 厳密な証明を書いたので, それを参考にして, $h(C) = D$ を示してみよう.

(4) 0 以上の実数からなる集合を $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とかくと、例 1 の g に対して、 $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ になる。

証明. 「集合が等しい」ということの定義から、 $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset g(\mathbb{R})$ を示せばよい。

$g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ について任意に $y \in g(\mathbb{R})$ をとると、像の定義より、ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して、 $g(x) = y$ とかける。 g の定義より、 $y = x^2$ ということ。ここで、実数の 2 乗は常に 0 以上、つまり、 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の元となるので、 $y = x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ となる。よって、 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ が分かった。

$\mathbb{R}_{\geq 0} \subset g(\mathbb{R})$ について任意に $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ をとる。示すべきことは $y \in g(\mathbb{R})$ 、つまり、ある実数 x が存在して、 $g(x) = y$ となることである。ここで、 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の定義から $y \geq 0$ であるから、 \sqrt{y} は実数であり、したがって、 $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ ととれば、これは、 $g(x) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ をみたす。よって、 $y \in g(\mathbb{R})$ がわかり、 $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset g(\mathbb{R})$ が示せた。

以上より、 $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ が分かった。□

3.3 全射と単射

写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。 $\text{Im}(f) = B$ のとき、言い換えれば、 B のどんな元 b に対しても $f(a) = b$ となるような $a \in A$ が存在するとき、 f は全射であるという。 f が全射ということは、「任意の $b \in B$ に対して、その逆像 $f^{-1}(b)$ は空集合ではない」ということの言い換えでもある。

また、どんな A の 2 元 a, a' に対しても、「 $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$ 」となるとき、 f は単射であるという。この条件は、「 $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$ 」、つまり、「違う元は、同じところには写らない」ということと同じである。単射であれば、 $b \in \text{Im}(f)$ に対して、その逆像 $f^{-1}(b)$ は 1 元からなる集合である。

例えば、例 1 の $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全射でも単射でもない。例 2 の (1), (2) で考えたことを元に確認してみよう。

また、例 1 の $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は単射である。実際、任意の $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $h(a, b) = h(c, d)$ とすれば、 $(a + b, 3a) = (c + d, 3c)$ であるので、第 2 成分を比較して、 $a = c$ 、このとき、第 1 成分を比較して、 $b = d$ が分かるので、 $(a, b) = (c, d)$ が成り立つ。(実は h は全射でもある。証明してみよう。)

$f: A \rightarrow B$ が全射であり、単射でもあるときには、 f は全単射である、という。例えば、集合 A から集合 A への写像で a をまた a に写す (、要するに何も動かさない) 写像を A の恒等写像といい、 $1_A: A \rightarrow A$ で表します。 1_A は全単射になります。また、上に述べたように、例 1 の $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ も全単射の例である。

3.4 合成写像と逆写像

2 つの写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、 f と g の合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ が $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ によって、定義されます。 $f(a) \in B$ なので、ちゃんと $g(f(a))$ が考えられることに注意してください。例えば、例 1 の $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は合成できて、合成写像 $m \circ h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を定めます。具体的に計算してみると、写像 $m \circ h$ は $(m \circ h)(x, y) = 3x(x + y)$ というものであることがわかります。

また、 $f: A \rightarrow B$ を全単射とすると、どんな B の元 b に対しても、 $f(a) = b$ となる a がただひとつ必ず存在するので、新しく、 B から A への写像を対応 $b \mapsto a$ により定めることができます。この写像を f の逆写像といい、 $f^{-1}: B \rightarrow A$ とかきます。 f^{-1} もまた全単射になることに注意してください。また、作り方から、 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ であり、 $f \circ f^{-1} = 1_B$ であり、また $f^{-1} \circ f = 1_A$ となります。

例えば、例 1 の写像 h は全単射であり、次で定まる逆写像を持つことがわかります：

$$h^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{3}y, x - \frac{1}{3}y\right)$$

$h \circ h^{-1} = 1_{\mathbb{R}^2}$ 、 $h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}^2}$ であることを具体的に確かめてみましょう。