線形代数学 (1S) 定期試験 直前プリント (2015 年 7 月 23 日実施)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　　) 番号 (　　　) 氏名　(　　　　　　　　　　　　　　　　)

注意　1. 答えだけでなく途中式も残してください.

1. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は 1 次独立か. 理由も付けて答えよ.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は 1 次従属であることを示し, 非自明な 1 次関係式を具体的にひとつ求めよ.

2. 正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ を求めよ.

4. 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合は部分空間であるか. 部分空間であれば, そのことを証明し, 部分空間でなければ, その理由を説明せよ.

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 - x_2 = 0 \right\}$

5. 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = -8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

6. 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元と一組の基底を求めよ.

(1) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7. 次の写像のうち, 線形写像でないものをすべて選び, その理由を説明せよ.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x - 3y$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ 2x+3z \end{pmatrix}$

8. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+5y \\ -2x+3y \end{pmatrix}$ について, 次の基底に関する表現行列を求めよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

線形代数学 (1S) 定期試験 直前プリント 解答例 (2015 年 7 月 23 日実施)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　　) 番号 (　　　) 氏名　(　　　　　　　　　　　　　)

注意　1. 答えだけでなく途中式も残してください.

1. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は 1 次独立か. 理由も付けて答えよ.

解. 2 本のベクトルを並べた行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ の階数がベクトルの本数と一致すれば 1 次独立, 小さければ 1 次従属である.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+①\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $\operatorname{rank} A = 2$ なので, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は 1 次独立である.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は 1 次従属であることを示し, 非自明な 1 次関係式を具体的にひとつ求めよ.

解. 3 本のベクトルを並べた行列 $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ の階数がベクトルの本数と一致すれば 1 次独立, 小さければ 1 次従属である.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+①\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $\operatorname{rank} B = 2$ なので, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は 1 次従属である.

また, $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}$ となる $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ を具体的に求めるには, $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ だから, $B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という同次連立方程式の非自明解をひとつ求めれば良い. すると, 上で求めた B に基本変形を施した行列を考えて, $b = k$ を任意定数とすれば, $c = -k$, $a = 2k$ となるので,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は任意定数})$$

と求まる. したがって, 非自明な 1 次関係式としては,

$$2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}$$

がある.

2. 正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解. 与えられた行列を A とおく. A の行列式はサラスの公式より,

$$|A| = 0 + 3 + (-16) - 0 - (-18) - 2 = 3$$

である. また, A の各 (i, j) 余因子 A_{ij} は

$$\begin{aligned} A_{11} &= +(0 \cdot (-3) - 1 \cdot 2) = -2, & A_{12} &= -(2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) = 7, & A_{13} &= +(2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 4, \\ A_{21} &= -(3 \cdot (-3) - (-4) \cdot 2) = 1, & A_{22} &= +(1 \cdot (-3) - (-4) \cdot 1) = 1, & A_{23} &= -(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = 1, \\ A_{31} &= +(3 \cdot 1 - (-4) \cdot 0) = 3, & A_{32} &= -(1 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) = -9, & A_{33} &= +(1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = -6 \end{aligned}$$

となるので,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -9 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

(注. 掃き出し法で求めても良い)

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ を求めよ.

解.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{①+③\times 5,④+③\times(-4)}{=} \begin{vmatrix} 37 & 16 & 27 & 0 \\ -1 & 8 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \\ -22 & -14 & -17 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 37 & 16 & 27 \\ -1 & 8 & 4 \\ -22 & -14 & -17 \end{vmatrix} \overset{①+②\times 37,③+②\times(-22)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 312 & 175 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & -190 & -105 \end{vmatrix}$$

$$\overset{[2]+[3]\times(-2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -38 & 175 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & 20 & -105 \end{vmatrix} \overset{①+③\times 2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -35 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & 20 & -105 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -35 \\ 20 & -105 \end{vmatrix} = -35\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 20 & 3 \end{vmatrix} = -35 \cdot (2 \cdot 3 - 1 \cdot 20)$$

$$= 490$$

4. 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合は部分空間であるか. 部分空間であれば, そのことを証明し, 部分空間でなければ, その理由を説明せよ.

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$

解. 部分空間である.

証明. 任意に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W_1$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ をとる. W_1 の定義より,

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad 2y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

である. このとき, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ について,

$$2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = (2x_1 + x_2 - x_3) + (2y_1 + y_2 - y_3) = 0$$

であるので, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1$ がわかる. また, $c\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix}$ についても,

$$2(cx_1) + cx_2 - cx_3 = c(2x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

となるので, $c\boldsymbol{x} \in W_1$ がわかる. 以上より, W_1 は和とスカラー倍で閉じているので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である. □

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 - x_2 = 0 \right\}$

解. 部分空間ではない.

理由. 例えば, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $1^2 - 1 = 0$ をみたすので, $\boldsymbol{x} \in W_2$ であるが, その 2 倍 $2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ については $2^2 - 2 = 2 \neq 0$ となり, $2\boldsymbol{x} \notin W_2$ である. したがって, W_2 はスカラー倍について閉じていないので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない.

5. 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = -8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

解. この連立方程式の係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とかく. $\tilde{A}$ を基本変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -10 & 12 & -8 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-3),③+①\times 4,④+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 8 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\times(-2),④+②\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 2$ となり, この連立方程式は解を持つ. 解の自由度は $4 - \operatorname{rank} A = 2$ であり, $x_3 = c, x_4 = d$ を任意定数とすれば, 解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c + d + 1 \\ c - 4d - 2 \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c, d \text{ は任意定数})$$

となる.

6. 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元と一組の基底を求めよ.

(1) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

解. 生成系を並べた行列を A とし, A を基本変形すると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-2),③+①\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $\operatorname{rank} A = 2$ である. したがって, これら 3 本のベクトルで生成されるベクトル空間 W_1 の次元は $\dim W_1 = \operatorname{rank} A = 2$ である. また, 例えば, 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{rank} B = 2$ であることがわかるので, この 2 本は 1 次独立であり, したがって, 基底としては,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

がとれる.

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

解. W_2 の定義に現れている連立方程式の係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする. $\tilde{A}$ に基本変形を施して

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-2),③+①\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 解の自由度は $3 - \operatorname{rank} A = 1$ である. $z = 7c$ とおけば, $-7y + 35c = 0$ より $y = 5c$, また $x + 20c - 14c = 0$ より $x = -6c$ となるので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数}).$$

したがって, $\dim W_2 = 1$ であり, 基底としては

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

がとれる.

7. 次の写像のうち, 線形写像でないものをすべて選び, その理由を説明せよ.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x - 3y$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ 2x+3z \end{pmatrix}$

解. (b) が線形写像ではない.

理由. 例えば, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるが, 一方,

$$f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. したがって, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \neq f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ であり, f は和を保たないので, とくに線形写像ではない.

8. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+5y \\ -2x+3y \end{pmatrix}$ について, 次の基底に関する表現行列を求めよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

解. 基底のベクトルを順に, $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ とし, 求める表現行列を P とすれば,

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}_1) & f(\boldsymbol{x}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} P$$

が成り立つ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

となるので,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

となる.

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

解. 基底のベクトルを順に, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x_2}$ と $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}$ とし, 求める表現行列を Q とすれば,

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}_1) & f(\boldsymbol{x}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} Q$$

が成り立つ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P$$

となるので,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$$

となる.