微分方程式 宿題 No.11 解答の修正 (20　年　月　日出題)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名 (　　　　　　　　)

解答に不備がありましたので, 当該解答だけ, 修正したものを掲載します. ご指摘いただいた方々ありがとうございました. これ以外でも修正があれば, お知らせいただければと思います。

解答

1. $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y = ux$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

となり, 微分方程式は

$$u + x\frac{du}{dx} = u + 1 + \frac{2}{u}$$

となる. これを変形して,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} &= 1 + \frac{2}{u} = \frac{u+2}{u} \\ \frac{u}{u+2}du &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

割り算をして, $u = 1 \times (u+2) - 2$ となるので,

$$\begin{aligned} &\int \left(1 - \frac{2}{u+2}\right) du = \int \frac{dx}{x} \\ &u - 2\log(u+2) = \log x + C \\ &\log x(u+2)^2 = u - C \\ &x(u+2)^2 = e^{u-C} \ (A = e^{-C} \text{ とおいて}) \\ &x\left(\frac{y}{x} + 2\right)^2 = Ae^{\frac{y}{x}} \\ &\therefore \underline{(y+2x)^2 = Axe^{\frac{y}{x}} \ (A \text{ は任意定数})}. \end{aligned}$$

3.

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

であるから,

$$\begin{aligned} y' &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \tan x + A \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} y &= \int y' dx \\ &= \int (\tan x + A) dx \end{aligned}$$

$\left(\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\right.$ とみて, $t = \cos x$ とおくと)

$$= \underline{-\log|\cos x| + Ax + B \ (A, B \text{ は任意定数})}$$

7. 補助方程式 $y'' - 2y' - 3y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ であり, その解は $\lambda = 3, -1$ であるから, 補助方程式の解は

$$y = Ae^{3x} + Be^{-x} \ (A, B \text{ は任意定数})$$

となる.

次に, $y'' - 2y' - 3y = x + \cos x$ の特殊解をひとつ求める. 右辺 $x + \cos x$ およびその導関数として出てくる, $\sin x, \cos x, x, 1$ の線形結合 $y = a\sin x + b\cos x + cx + d$ が解になると予想すると,

$$y' = a\cos x - b\sin x + c, \quad y'' = -a\sin x - b\cos x$$

となるので, これらを微分方程式に代入して,

$$\begin{aligned} &(-a\sin x - b\cos x) - 2(a\cos x - b\sin x + c) \\ &\qquad -3(a\sin x + b\cos x + cx + d) = x + \cos x \\ &(-4a+2b)\sin x + (-2a-4b)\cos x - 3cx + (-2c-3d) = x + \cos x \end{aligned}$$

を得る. したがって,

$$\begin{cases} -4a+2b &= 0 \\ -2a-4b &= 1 \\ -3c &= 1 \\ -2c-3d &= 0, \end{cases} \quad \therefore (a, b, c, d) = \left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$$

となればよく, 特殊解として, $y = -\dfrac{1}{10}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{9}$ が得られる.

以上より, 求める一般解は,

$$\begin{aligned} y &= (\text{補助方程式の解}) + (\text{特殊解}) \\ &= \underline{Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \ (A, B \text{ は任意定数})}. \end{aligned}$$