基礎解析 IIA (2MC) 第 5 講　プリント (三角関数 公式集) (20　　年　　月　　日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　　) 番号 (　　　) 氏名　(　　　　　　　　　　　　)

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

- すべての公式の基本. 必ず覚えること.
- **覚え方**: sin-「咲いたコスモス コスモス咲いた」
- **覚え方**: cos- 「コスモスコスモス 咲いた咲いた」
- tan の加法定理:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta)a = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

- 符号が覚えられないという人がいるが, 引き算の加法定理で $\alpha=\beta$ の場合を考えればよい. 足し算の加法定理はその逆符号になる. 例えば, 4 つめの式の符号がわからない

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta \ ? \ \sin\alpha\sin\beta$$

とすれば, $\alpha=\beta$ として,

$$\cos(\alpha-\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha \ ? \ \sin\alpha\sin\alpha$$

なので, 左辺が $\cos 0 = 1$ であることを考えれば, $? = +$ とわかる.

三角関数の合成

$(a,b) \neq (0,0)$ とする. このとき,

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

ここで,

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\alpha \text{ は } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ をみたす角.}$$

- **使いどき**: 三角関数をひとつにまとめたいとき.
- **覚え方**: 点 $\mathrm{P}(a,b)$ をとり,

$$r = \text{原点 O と P の距離}$$
$$\alpha = \text{OP と } x \text{ 軸のなす角}$$

とすればよい.

- これが使えるのは, sin と cos の後の角度が同じときだけ. 例えば, $\sin\theta + \cos 2\theta$ などはこの方法でまとめることはできない.
- sin の加法定理の代わりに, cos の加法定理を用いることで, 同じ考え方により, $r\cos(\theta+\beta)$ の形にまとめることもできる.

2 倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

- **使いどき**: α の三角比が分かっていて, 2α の三角比が知りたいとき.
- **求め方**: 加法定理で $\beta = \alpha$ とすれば出てくる.
- $\cos 2\alpha$ については, $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ よりも, cos だけの式にした $2\cos^2\alpha - 1$ や sin だけの式にした $1 - 2\sin^2\alpha$ のほうがよく使われる.

半角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} \\
\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2} \\
\tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

- **使いどき**: α の三角比がわかっていて, $\dfrac{\alpha}{2}$ の三角比が知りたいとき.
- **求め方**: $\cos\alpha$ をあえて $\cos\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とみて, 2 倍角の公式を使う.

  $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ については, $\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ とみればよい.

3 倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}
$$

- **使いどき**: α の三角比がわかっていて, 3α の三角比が知りたいとき.
- **求め方**: $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ と見て, 加法定理と 2 倍角の公式を使う. sin だけ, cos だけになるように意識して計算する.

$$
\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\
&= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \\
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}
$$

- **覚え方**: sin- 「サンシャイン 引いて 夜風が身にしみる」
- **覚え方**: cos- sin の方を覚えておいて, 項の順番を逆にする.
- 2 倍角に比べれば, 使用頻度は少ない.

積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

- **使いどき**: 三角関数の積を三角関数の和に書き換えたいとき. α や β の三角比はわからないが, $\alpha+\beta$ や $\alpha-\beta$ の三角比ならわかるとき.
- **求め方**: $\cos\alpha\cos\beta$ を例に取る.
  1. 考えている積が現れるような加法定理を思い出して書き並べる.
  $$\cos(\alpha+\beta) = \underline{\cos\alpha\cos\beta} - \sin\alpha\sin\beta$$
  $$\cos(\alpha-\beta) = \underline{\cos\alpha\cos\beta} + \sin\alpha\sin\beta$$
  2. 考えている積が残るように, 2 式を足すか引くかする.
  $$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\underline{\cos\alpha\cos\beta}$$
  3. 最後に 2 (または -2) で割る.
  $$\underline{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
- 三角関数の積を積分するときによく利用される.

和積の公式

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- **使いどき**: 三角関数の和を三角関数の積に書き換えたいとき. A や B の三角比はわからないが, $\dfrac{A+B}{2}$ や $\dfrac{A-B}{2}$ の三角比ならわかるとき.
- **求め方**: $\sin A+\sin B$ を例に取る.
  1. $A=\alpha+\beta$, $B=\alpha-\beta$ とおいて, 加法定理を使う
  $$\sin A = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
  $$\sin B = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$
  2. 和 (または差) をとる.
  $$\sin A+\sin B = 2\sin\alpha\cos\beta.$$
  3. α と β を求める (A と B で表す).
  $$\begin{cases}\alpha+\beta &= A\\ \alpha-\beta &= B\end{cases} \text{を解くと, } \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}.$$
  4. 2. の結果に, 3 を代入する.
  $$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

  (手順 1, 2 は積和の公式で, $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ とおく, と考えてもよい.)

おまけ (基本事項)

相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

正弦定理

△ABC の外接円半径を R とするとき,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

余弦定理

△ABC において,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

めも欄 ϕ (..)