基礎解析 IIA (2MC) 第 23 講　プリント (微分 公式集) (20　　年　　月　　日配布)

担当: 一般学科 植松 哲也 (uematsu@toyota-ct.ac.jp)

学年・学科 (　　) 番号 (　　) 氏名　(　　　　　　　　)

導関数

- 関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの**平均変化率**とは, $y=f(x)$ のグラフにおいて $x=a$ から $x=b$ まで変化するときの傾き, すなわち

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- 関数 $y=f(x)$ に対して, その**導関数** $f'(x)$ とは

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で定まる関数のこと. $f'(x)$ のほか,

$$y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df}{dx},\quad \frac{df}{dx}(x)$$

などとも表される.
(y' という記号は簡便だが, **どの文字で微分したものかが表せない**し, $f'(3)$ のように, 値を代入したものを表すことができない.)

- $f(x)$ の導関数を求めることを「**$f(x)$ を x で微分する**」という.
- 導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入した値のことを,「**$x=a$ における $f(x)$ の微分係数**」といい, $f'(a)$ で表す. 導関数の定義で, $x=a$ としたものなので, 極限で表せば,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となる. これは「**$y=f(x)$ のグラフの $x=a$ における接線の傾き**」を表している.

x^n の微分, 定数関数の微分

べき関数 $y=x^n$ $(n\geq 1)$ に対し,

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

また, 定数関数 $y=c$ に対し

$$c'=0$$

- 例.

$$(x^4)'=4x^3,$$
$$(x^{17})'=17x^{16},$$
$$x'=1,$$
$$5'=0.$$

- 結果的には, 自然数 n に限らず, 0 **以外の全ての実数 r に対して,**

$$(x^r)'=rx^{r-1}$$

が成り立つ.

和・差, スカラー倍の微分公式

関数 $f(x)$, $g(x)$ と実数 c に対して,

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$
$$(cf(x))' = cf'(x)$$

3 つ以上の和や差も同様にバラバラにして微分すれば計算できる.

- 例.

$$(x^3+x^2)' = (x^3)'+(x^2)' = 3x^2+2x.$$
$$(1-x^4)' = 1'-(x^4)' = 0-4x^3 = -4x^3.$$
$$\begin{aligned}(2x^2-5x+6)' &= (2x^2)'-(5x)'+6' \\ &= 2(x^2)'-5(x)'+6' \\ &= 2\cdot 2x-5\cdot 1+0 \\ &= 4x-5.\end{aligned}$$

積・商の微分公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(ビブン・そのまま ＋ そのまま・ビブン)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

- 例.

$$\begin{aligned}\{(x+1)(3x+4)\}' &= (x+1)'(3x+4)+(x+1)(3x+4)' \\ &= 1\cdot(3x+4)+(x+1)\cdot 3 \\ &= 6x+7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{x+3}{x^2+1}\right\}' &= \frac{(x+3)'(x^2+1)-(x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot(x^2+1)-(x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

- $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ などという式は全く正しくない.
- 分数式なら, 商の微分を使えば導関数は求められるが, ちょっと立ち止まることも大切. 例えば,

$$\frac{x^2-1}{3}, \quad \frac{x^2+2}{x}$$

などはそれぞれ,

$$\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}, \quad x+\frac{2}{x}$$

と見れば, 計算量を減らすことができる.

合成関数の微分公式

$y=f(t)$, $t=g(x)$ の**合成関数** $y=(f\circ g)(x)$ (つまり, $y=f(g(x))$) に対して,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

- 例. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{t}}=t^{-\frac{1}{2}},\quad t=x^2+3$$

と見ると,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{3}{2}t^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}.$$

- **使いどき**: まとまりがはっきり見えるとき. **y を t だけの式にできないときは, 使えない.** 例えば, $\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ などの場合は, $t=x^2+3$ とおいたところで, 分子の $(x+1)^3$ を t の式で表せるわけではないので, 合成関数の微分公式を (直接は) 使えない. いったん商の微分を利用して

$$\frac{\{(x+1)^3\}'\sqrt[3]{x^2+3}-(x+1)^3(\sqrt[3]{x^2+3})'}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}$$

とし, そのうえで個別に, $\{(x+1)^3\}'$ や $(\sqrt[3]{x^2+3})'$ に合成関数の微分を用いることになる.

- また, 合成関数と見るときは**微分を知っているものに分割する**のが原則. 例えば, 例. の関数は

$$y=\frac{1}{t},\quad t=\sqrt{x^2+3}$$

の合成関数とも見ることができるが, こう見てしまうと, $\dfrac{dt}{dx}$ を計算するときに, $t=\sqrt{s},\quad s=x^2+3$ ともう一度合成関数と見なければならず, (できないことはないが,) 計算が大変である.

対数関数の微分公式

- **自然対数の底** e とは

$$e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

で定まる無理数で, およそ $2.718281828\cdots$.

- e を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数** といい, 通常, 底を省略して, $\log x$ と書く. 自然対数の微分は以下で与えられる:

$$(\log x)'=\frac{1}{x}$$

- 底が e でないような対数関数の微分を計算する必要があるときは, **底の変換公式**を用いる.
- 例.

$$\begin{aligned}(\log_2 x)'&=\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)'\\&=\left(\frac{1}{\log 2}\log x\right)'\\&=\frac{1}{\log 2}(\log x)'=\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\log 2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\log x}\right)'&=\frac{x'\cdot\log x-x\cdot(\log x)'}{(\log x)^2}\\&=\frac{\log x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}=\frac{\log x-1}{(\log x)^2}.\end{aligned}$$

$$\{\log(x^2+1)\}'\quad(y=\log t,\quad t=x^2+1 \text{ と見ると})$$

$$\begin{aligned}&=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(\log t)'\cdot(x^2+1)'\\&=\frac{1}{t}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

指数関数の微分公式

底を e とする指数関数 $y = e^x$ について，その導関数は以下で与えられる:

$$(e^x)' = e^x \quad (\textbf{変わらない！})$$

- 底が e でない指数関数の微分を計算する必要があるときは，**対数微分法**を用いる．
  例．$y = 3^x$ を微分せよ．
  両辺の自然対数を取ると，$\log y = x \log 3$．この両辺を x で微分する．左辺は $z = \log y, \quad y = 3^x$ と見て，
  $$(\log y)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$
  となり，右辺は 1 次関数なので，
  $$(x \log 3)' = \log 3$$
  となる．結局，
  $$\frac{y'}{y} = \log 3$$
  となるので，$y' = y \log 3 = 3^x \log 3$．
- 例．$y = e^{3x^3+2x+1}$ を微分せよ．
  $y = e^t$, $t = 3x^3 + 2x + 1$ とおくと，
  $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= e^t \cdot (9x^2 + 2) \\ &= (9x^2 + 2)e^{3x^3+2x+1}\end{aligned}$$

三角関数の微分

- 極限 $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ が重要な役割を果たす．これを用いることで，三角関数の微分公式:
  $$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
  を得る．
- $\sin x$, $\cos x$ については，覚えてしまう．符号がわからなくなる人が多いが，**グラフがかければ，符号はわかる．**例えば，$\sin x$ の微分が，$\cos x$ か $-\cos x$ か分からなくなったら，$y = \sin x$ のグラフを思い出す．すると，$x = 0$ でグラフの傾きは正なので，$\cos 0 = 1$ ということから，$(\sin x)' = \cos x$ とわかる．(もし $-\cos x$ だったら，$x = 0$ でのグラフの傾きが -1 になってしまうので.)
- $\tan x$ については，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ということと，商の微分を利用すれば，すぐに出てくる．
- 例．$y = \sin^3(2x + 1)$ を微分せよ．
  $y = \sin^3 t$, $t = 2x + 1$ とおくと，
  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot 2x.$$
  ここで，$y = \sin^3 t$ について，$y = u^3, u = \sin t$ とおくと，
  $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = 3u^2 \cdot \cos t.$$
  以上まとめると，
  $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = 3u^2 \cdot \cos t \cdot 2 \\ &= 3\sin^2(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1) \cdot 2 \\ &= 6\sin^2(2x + 1)\cos(2x + 1)\end{aligned}$$