2013 年度 応用数学 I 前期期末試験

担当教員: 植松哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

実施日時: 2013 年 7 月 29 日 10:20〜11:20 (60 分)
配布物: 問題用紙 1 枚 (本紙, A4 両面)
解答用紙 2 枚 (B4 両面)
計算用紙 1 枚 (B4 両面)

試験開始前に, 以下に目を通しておいてください.

注意事項

1. 試験問題は, 本紙の裏面にある. 試験開始時間までは見ないこと.
2. 解答用紙には, クラス・番号・名前を所定の欄に記入し, 白紙であっても必ず 2 枚とも提出すること.
3. 必ずしも, 順番通りに解答する必要はないが, 解答の前には, 問題番号を明記すること.
   解答は答えだけでなく, 計算過程がわかるように記述すること.
4. 試験時間中に問題用紙・解答用紙・計算用紙を試験教室から持ち出すことは許されない.
5. ノート類の持ち込みは一切不可とする.
   机上には, 筆記用具以外はおかず, また机の中は空にしておくこと.
6. 携帯電話は, 時計としての使用も認められない. 電源を切って鞄の中にしまうこと.
7. その他, 受験者要項に従うこと.

応用数学 I 前期期末試験 試験問題

以下の**問題 1** から**問題 4** に答えよ. 結果だけでなく, 途中式も残しておくこと.

問題 1. 曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t}), \quad (0 \leqq t \leqq 2)$ を考える.

(1) スカラー場 $\phi = xyz + 2$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \phi dy$ を求めよ.

(2) 曲線 C の長さ $s = \displaystyle\int_C ds = \int_C \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (z, y, x)$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

問題 2. 閉曲線 C を xy 平面上の円周 $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とする.

(1) 曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C \{(x + 2y)dx + (3x - y)dy\}$ を求めよ.

(2) 曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C \{(x^2 - y^2)dx + (2xy + y^3)dy\}$ を求めよ.

問題 3. ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u, v) = (u, 2\cos v, 2\sin v)$ (定義域 $D : 0 \leqq u \leqq 4, 0 \leqq v \leqq 2\pi$) で表される円柱面 S を考える.

(1) 曲面 S の 単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n} = (\pm)\dfrac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$ を求めよ. ただし, その向き ($\pm$ の符号) は, 円柱の外側を向くように定めよ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (z + x, x + y, y + z)$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ.

問題 4. 半径 R の球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ を考え, S の上半分 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geqq 0$ を S_+ とし, S_+ の境界 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ を C とする. 曲線 C のパラメータ表示として, $\boldsymbol{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0), (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ をとり, 球面 S の単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ は S の外側を向くようにとるものとする.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x + y, y + z, z + x)$ に対し, $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ を求めよ.

(2) (1) のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対し, 球面 S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{b} = (x, x + y + z, z)$ に対して, 面積分 $\displaystyle\int_{S_+} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ.

以上