2013 年度 応用数学 I 前期中間試験

担当教員: 植松哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

実施日時: 2013 年 6 月 4 日 9:00〜10:00 (60 分)
配布物: 問題用紙 1 枚 (本紙, A4 両面)
解答用紙 2 枚 (B4 両面)
計算用紙 1 枚 (B4 両面)

試験開始前に, 以下に目を通しておいてください.

注意事項

1. 試験問題は, 本紙の裏面にある. 試験開始時間までは見ないこと.
2. 解答用紙には, クラス・番号・名前を所定の欄に記入し, 白紙であっても必ず 2 枚とも提出すること.
3. 必ずしも, 順番通りに解答する必要はないが, 解答の前には, 問題番号を明記すること.
   解答は答えだけでなく, 計算過程がわかるように記述すること.
4. 試験時間中に問題用紙・解答用紙・計算用紙を試験教室から持ち出すことは許されない.
5. ノート類の持ち込みは一切不可とする.
   机上には, 筆記用具以外はおかず, また机の中は空にしておくこと.
6. 携帯電話は, 時計としての使用も認められない. 電源を切って鞄の中にしまうこと.
7. その他, 受験者要項に従うこと.

応用数学 I 前期中間試験 試験問題

以下の**問題 1** から**問題 5** に答えよ. 結果だけでなく, 途中式も残しておくこと.

問題 1. $\boldsymbol{a} = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (-3, 2, -1)$ とする.

(1) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ.

(3) 内積 $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})$ を求めよ.

(4) 外積 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ を求めよ.

問題 2. $\boldsymbol{r}(t) = \left(2t, t^2, \dfrac{t^3}{3}\right)$ で表される曲線 C 上の t に対応する点を $\mathrm{P}(t)$ で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の $\mathrm{P}(t)$ における単位接線ベクトル $\boldsymbol{t} = \dfrac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|}$ を求めよ.

(2) 曲線 C 上の $\mathrm{P}(t)$ における単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \dfrac{\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}}{\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\right|}$ を求めよ.

問題 3. ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u, v) = (2v, u\cos v, u\sin v)$ (定義域 $D : 0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq \pi$) で表される曲面 S を考える.

(1) 外積 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) A を定数とする.

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + A} + A\log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right|\right)\right\} = \sqrt{x^2 + A}$$

を示せ.

(3) 曲面 S の面積 $S = \displaystyle\iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv$ を求めよ. 必要なら, ((2) が解けていなくても,)(2) の微分公式を用いてよい.

問題 4. スカラー場 $\varphi = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ と, ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x^2e^y, 2y, xz^2)$ に対し, 次のものを求めよ.

(1) 勾配 $\mathrm{grad}\,\varphi$ $(\nabla\varphi)$ (2) 発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ $(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$ (3) 回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ $(\nabla\times\boldsymbol{a})$ (4) ラプラシアン $\Delta\varphi$

問題 5. (何回でも微分可能な) スカラー場 φ に対し, 等式 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \boldsymbol{0}$ を証明せよ.

以上