応用数学 I (複素解析, 2013 年度後期, 4M/4E) *

1 テスト範囲について

以前提示したもの[*1]と変わりませんが, 改めて, 試験範囲を提示しておきます.

教科書: p.134–167, 問題集 p.53-62

キーワード: 直線・円のパラメータ表示, 複素積分, 不定積分, Cauchy の積分定理, Cauchy の積分公式 (n 次導関数による積分公式), Laurent 展開 (もちろん Taylor 展開も), 孤立特異点 (除去可能特異点, 極, 真性特異点), 極の位数, 留数, 留数定理.

いままで同様, 小テストやレポート・宿題として課した問題についてはよく見なおしておきましょう.

2 複素解析の応用

複素解析は, 実積分の計算などに利用される, ということを話してきました. その一例として, 逆ラプラス変換の計算について紹介したいと思います.[*2] 微分方程式を代数的な方程式に変換 (ラプラス変換) し, 初期条件をこめて解いたのち, 逆変換をして, 元の方程式の解を求めるという流れを思い出して下さい. $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$ の逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}[F](t)$ は, 教科書 p.63 の変換表から, te^t ですが, ここでは, 複素積分を用いて, これを直接計算してみます.

逆ラプラス変換はブロムウィッチ積分

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}F(s)ds \quad (a \text{ は適当な正の実数, 積分路は直線 } \mathrm{Re}z = a.)$$

により計算できることが知られています (例えば, 問題集 p.59 参照). が, これを定義通りに計算することは困難なので, 留数定理を利用します.

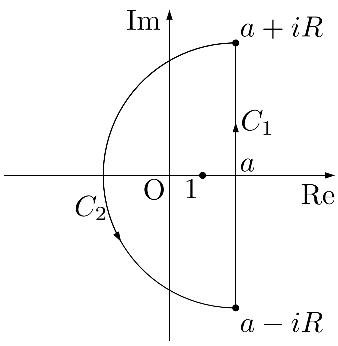
t を定数とみたとき, $f(z) = \dfrac{e^{tz}}{(z-1)^2}$ は $z = 1$ のみで 2 位の極を持つ複素関数です. $a > 1$ と

* 第 16 講 (2014 年 1 月 31 日) 配布プリント. 今日が最後の講義となります. 一年間ご清聴ありがとうございました. 試験頑張ってください.

[*1] 2013 年 10 月 4 日配布プリント参照

[*2] この他, 電気回路の計算はもちろん, 波動関数論やフーリエ変換に出てくる積分の計算, 等角写像を用いた流体の挙動の記述など, 複素変数に広げることで, 見通しが良くなる・計算ができるようになるといったことはよくあります.

なるように 正の実数 a を固定して, 極 $z=1$ を含むように, 十分大きな半径 $R(>0)$ の半円を描きます (次ページ参照).



留数定理により,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \mathrm{Res}[f,1] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\{(z-1)^2 f(z)\} = te^t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$\therefore \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i\cdot te^t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となります.

一方で, C_1, C_2 のパラメータ表示として,

$$C_1 : z(t) = a+iu\ (-R \leqq u \leqq R), \quad C_2 : z = a+Re^{iu}\ \left(\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

をとると. $R\to\infty$ としたとき, C_1 上の積分は,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz = \int_{a-i\infty}^{a+\infty}\frac{e^{tz}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i\mathcal{L}^{-1}[F](t)$$

となります. 一方, C_2 の部分は, 積分の絶対値の評価をして,

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \leqq (C_2\text{の長さ})\cdot(|f(z)|\text{ の }C_2\text{上での最大値}) \leqq \pi R\cdot\frac{e^{ta}}{(1-(a-R))^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

となります. したがって, ② 式で, $R\to\infty$ とした極限を考えると,

$$2\pi i\mathcal{L}^{-1}[F](t) + 0 = 2\pi i\cdot te^t$$

となり, $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$ の逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = te^t$ を得ます.

これにより, (C_2 の積分評価ができれば,) 変換表に載っていないような関数の逆ラプラス変換を求めることもできるようになります.

3　宿題 (2014 年 1 月 10 日出題) の解答

問題集の問題を宿題として出しましたが, 答のみなので, 解説をつけておきます.

113

(1) C_1 のパラメタ表示として,

$$z(t) = 1 + (i-1)t \ (0 \leqq t \leqq 1)$$

がとれる. したがって,

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 \{1+(i-1)t\}^2 \cdot (i-1)dt = \left[\frac{\{1+(i-1)t\}^3}{3}\right]_0^1 = \underline{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i}.$$

別解. z^2 は全平面で正則であるから, 不定積分 $z^3/3$ が存在する. したがって,

$$\int_{C_1} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^i = \underline{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i}.$$

(2) C_2 のパラメタ表示として,

$$z(t) = e^{it} \ (0 \leqq t \leqq \pi/2)$$

が取れる. したがって,

$$\int_{C_2} \overline{z} dz = \int_0^{\pi/2} e^{-it} \cdot ie^{it} dt = \underline{\frac{\pi}{2}}i.$$

注. $\overline{z}$ は正則関数でないから, 不定積分は存在せず, 積分の値は, (1) のように, 端点の値からだけは決まらない.

114

(1) $z^2 - iz + 2$ は全平面で正則であり, 不定積分 $\dfrac{1}{3}z^3 - \dfrac{i}{2}z^2 + 2z$ をもつ. したがって,

$$\int_C (z^2 - iz + 2)dz = \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{i}{2}z^2 + 2z\right]_0^{2+i} = \underline{\frac{20}{3} + \frac{25}{6}i}.$$

116

(2)

$$\int_C \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i}\left(\int_C \frac{e^{-iz}}{z-i}dz - \int_C \frac{e^{-iz}}{z+i}dz\right)$$

である. ここで, それぞれの被積分関数の極 $z = \pm i$ はともに積分路である円 C の内側にあるので, Cauchy の積分表示より,

$$\int_C \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i}(2\pi i e^{-1} - 2\pi i e^{1}) = \underline{\pi\left(e - e^{-1}\right)}.$$

(4) $\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ の極 $z=\pi$ は長方形 C の中に含まれるから, 導関数に対する Cauchy の積分表示

$$g^{(n)}(\alpha)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

において, $g(z)=\sin z, \alpha=\pi, n=1$ とすることにより,

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}dz=2\pi i\cdot(\cos z)|_{z=\pi}=\underline{-2\pi i}.$$

118

(1) 孤立特異点は $z=-2$ である. $z=-2$ を中心とする e^z の Taylor 展開は $\mathbb{C}$ 全体において

$$e^z=e^{-2}+e^{-2}(z-2)+\cdots+\frac{e^{-2}}{n!}(z-2)^n+\cdots$$

であるから, これを $z-2$ で割ることにより,

$$\frac{e^z}{z-2}=\underline{\frac{e^{-2}}{z-2}+e^{-2}+\frac{e^{-2}}{2}(z-2)+\cdots+\frac{e^{-2}}{(n+1)!}(z-2)^n+\cdots}, \quad (0<|z+2|)$$

を得る.

(2) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}=\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}$ より孤立特異点は $z=-2,-3$ である. $z=-2$ を中心とする $\dfrac{1}{z+3}$ の Taylor 展開は $|z+2|<1$ において

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{1-\{-(z+2)\}}=1-(z+2)+(z+2)^2+\cdots+(-1)^n(z+2)^n+\cdots$$

であるから, これを $z+2$ で割ることにより, $z=-2$ を中心とする Laurent 展開

$$\frac{1}{z^2+5z+6}=\underline{\frac{1}{z+2}-1+(z+2)+\cdots+(-1)^{n+1}(z+2)^n+\cdots}, \quad (0<|z+2|<1)$$

を得る. 同様に, $z=-3$ を中心とする $\dfrac{1}{z+2}$ の Taylor 展開は $|z+3|<1$ において

$$\frac{1}{z+2}=\frac{-1}{1-\{(z+3)\}}=-1-(z+3)-(z+3)^2-\cdots-(z+3)^n-\cdots$$

であるから, これを $z+3$ でわることにより, $z=-3$ を中心とする Laurent 展開

$$\frac{1}{z^2+5z+6}=\underline{-\frac{1}{z+3}-1-(z+3)-\cdots-(z+3)^n-\cdots}, \quad (0<|z+3|<1)$$

を得る.