応用数学 I (複素解析, 2013 年度後期, 4M/4E) *

1 小テスト解答 (12 月 20 日実施) の訂正

- 問 1 (1):
  誤: $z(t) = t \cdot 1 + (1-t)(2+i)(= (-1-i)t + 2 + i) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$
  正: $z(t) = (1-t) \cdot 1 + t(2+i)(= (1+i)t + 1) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$
  1 を始点として, $2+i$ を終点とする曲線なので, $0 \leqq t \leqq 1$ とパラメーターをとるならば, $t=0$ を代入して 1, $t=1$ を代入して $2+i$ が出てくるようにする必要があります. [*1]
- 問 2 (1):
  出題した問題と, 解答の問題が食い違っていました. 出題した問題は $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-6)}$ の原点中心, 半径 4 の円 C に沿った複素積分でした. 以下, その解答です.

$$\int_C f(z)dz = \frac{3}{2}\int_C \frac{1}{z-6}dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z-2}dz$$

  となる. ここで, 第 1 項は, $z=6$ が C の外側にある, すなわち, $\dfrac{1}{z-6}$ が C の内部で正則であることから, Cauchy の積分定理により, その値は 0 となる. 一方, 第 2 項は, $z=2$ が C の内部に含まれていることから, Cauchy の積分表示 $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$ を, $f(z)=1$ (定数関数), $\alpha = 2$ として用いることにより, その値は $\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot f(2) = \pi i$ となる. したがって, 求める積分の値は $0 - \pi i = \underline{-\pi i}$.

2 小テストの講評

- **1.** (1), (2): 線分と, 円のパラメータ表示を求める問題です. 平面ベクトルと見れば, 複素数 $\mathrm{A}(1) = \mathrm{A}(1+0i)$ は平面上の点 $\mathrm{A}(1,0)$ に対応し, $\mathrm{B}(2+i)$ は 平面上の点 $\mathrm{B}(2,1)$ に対応します. 線分 AB を $t : 1-t$ に内分する点 $\mathrm{P}(z(t))$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1-t)(1,0) + t(2,1) = (1,0) + t(1,1)$$

---

* 第 13 講 (2014 年 1 月 10 日) 配布プリント. 明けましておめでとうございます. 今年もよろしくお願い致します.

[*1] 普通は, t が増える方向にパラメータをとることが多いですが, t: $1 \to 0$ という向きにすれば, $z(t) = t \cdot 1 + (1-t)(2+i)$ でも正解となります (単に $0 \leqq t \leqq 1$ と書いたら, 0 から 1 へと受け取られるので, 注意してください).

となりますから, これを複素数に置き換えれば, $z(t) = 1 + t(1+i)$ となります. $t = 0$ のときが A で, $t = 1$ のときが B ですから, t の動く範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ となります. [*2]
円についても, すぐに $i + 2e^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ という表示が出せるようにしておくべきですが, xy 平面に置き直して考えれば, 中心 $(0, 1)$, 半径 2 の円の方程式は, $x^2 + (y-1)^2 = 2^2$ でした. 単位円上の点が $(\cos t, \sin t)$ と表されるのと同様に, この円は, $(2\cos t, 2\sin t + 1)$ というパラメータ表示をもつので, これを再び複素数に直せば,

$$2\cos t + i(2\sin t + 1) = i + 2(\cos t + i \sin t) = i + 2e^{it}$$

となることがわかります.

- **1.**(3): 複素積分です. 基本的にこれからは, Cauchy の積分定理と積分公式を使いこなして, 計算をしていくことになりますが, もともとは, 曲線をパラメータ表示し, それを積分の式に代入して定義されていたものであることは忘れないで下さい.
- **2.**(1), (2): これは積分定理・積分公式を覚えた上で使いこなす問題です. 公式と見比べて, 何を $f(z)$ とおけばよいか, α に当たるものはなにかを見極めて公式を適用してください.
(1) では, 定石通り「(定数)/(一次式)」の形に部分分数分解してもよいですし,

$$\frac{z}{(z-2)(z-6)} = \frac{z}{4}\left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z-6} - \frac{z}{z-2}\right)$$

のようにしても構いません. 分子の $f(z)$ にあたる部分は正則関数でさえあればよいので, 分母を 1 次式にさえできれば, $f(z) = z$ として, 積分定理 (積分公式) を適用できるからです.
また, $\dfrac{1}{z-\alpha}$ の積分において, 不定積分を $\log(z-\alpha)$ であるものとして計算している人が少なからずいました. このような不定積分が取れるのは, 特定の条件下に限ります.[*3] なので, $1/z$ をみても安易に $\operatorname{Log} z$ を不定積分としてとらないでください. 応用上重要になる, 単一閉曲線 C に沿って積分する場合に限っていえば, 「α が C の内側にあるか, 外側にあるか」ということにだけ注目すれば計算できます.

3 宿題

問題集の次の問題を A4 レポート用紙に解いてくること. 提出は 1 月 16 日 (木)17:00 までに学生課へ. 氏名, 番号を明記し, 途中式も記すこと.

問題: 113 (1), (4), **114** (1), **116** (2), (4), **117** (2), (4), **118** (1), (2)

なお, 来週は (3 の倍数ではないですが) 小テストを実施します. 範囲は積分の初めから〜今日やったところまで. 宿題の問題を解けるようにしておきましょう.

[*2] あるいは, 次のように考えてもよいでしょう. 線分 AB の方程式は xy 平面上で $y = x - 1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ と表されます. そこで, $t = x$ とおけば, $y = t - 1$ で, $1 \leqq t \leqq 2$ となります. $z = x + iy$ において, $\mathrm{Re}(z) = x = t$, $\mathrm{Im}(z) = y = t - 1$ ですから, 線分上の点 $z(t)$ の実部は t, 虚部は $t - 1$ と表されることがわかります. つまり, $z(t) = t + i(t-1)$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ というパラメータ表示を得ます.

[*3] そもそも $\log z$ は無限多価関数なので, 不定積分にはなりえません. 単連結領域 D で, D 上 $1/(z-\alpha)$ が正則であるようなものが存在するとき, $\log(z-\alpha)$ の偏角の範囲を適当に制限して, 1 価関数にしたものが不定積分となります.