応用数学 I (複素解析, 2013 年度後期, 4M/4E) *

1 前回の補足

- Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

について補足しておきます.「これを e の純虚数乗の定義だ」と思って, 計算しても, 特に問題は生じません (教科書ではそう思って議論を進めています) が，いきなりこんな式が天下りに与えられるのも納得が行かないかもしれないので, 普通の指数関数の拡張としての導入を説明します. [*1]

実数 x に対して, 指数関数 e^x は次の無限和表示をもちます. (マクローリン展開):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

「e の複素数乗」が何を意味するのかはよくわかりませんが, 右辺は別に複素数を代入しても意味を持つ[*2]ので,「e の複素数 z 乗」を 右辺の x に z を代入したものとして定義します[*3]. 同様にして, $\sin x$ や $\cos x$ についても,「複素数の三角比」というのはよくわかりませんが, そのテイラー展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots ,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

の右辺に複素数を代入したものを考えることはできる[*4]ので,「複素数 z の三角比」を 右辺の x に z を代入したものとして定義します.

---

* 第 2 講 (2013 年 10 月 4 日) 配布プリント.

[*1] 詳しくは, 例えば, 杉浦「解析入門 I」東大出版, 第 III 章, §3 等を参照.

[*2] とはいえ, 無限和ですので, 収束性については本来議論が必要になります.

[*3] このように無限級数で定義した場合, 複素数 z, w に対して, 指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ が成り立つことなどは, また別に証明する必要があります

[*4] ここでも収束性の議論が必要になります.

ここで, e^z に $z = i\theta$ を代入してみると,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

が成り立ちます.

- Euler が示した等式[*5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

について, 証明の方法を 2 つ提示しておきます.

ひとつは, フーリエ級数を用いるもので, 関数 $f(x) = x^2 (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ をフーリエ級数展開 ($\sin nx, \cos nx$ の和で表すこと) すると,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots\right)$$

という等式が得られます. ここで, $x = \pi$ を代入すると,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\right)$$

となって, 整理すると, 求めたかった等式が得られます.

もう一つは, 複素解析による証明です (が, 講義では扱いません). $\sin z$ の無限積展開と呼ばれる表示

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

と $\sin z$ のテイラー展開

$$\sin z = 1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

の z^3 の係数を比較することによって, 求めたかった等式が得られます.

2 試験範囲について

予定している試験範囲を提示しておきますので, 目安にしてください. (変更がある場合は, 再度提示します)

- 中間テスト: 教科書 p.111–133, 問題集 p.47–52.
- 期末テスト: 教科書 p.134–167, 問題集 p.53–62.

[*5] 4E での講義中にちょっと出てきた話です. 以下, 講義の内容そのものとは関係ないので, 理解する必要はありません.