応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E) *

1 前回講義の補足

- 宿題 (, というか各自チェックしておくように指示した問題) に対する解答例です.

問題. $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, 0)$ で表される曲線 C[*1]について, P(0) から P(2π) までの弧長 s を求めよ.

解. $\boldsymbol{r}(t)$ の P(a) から P(b) までの弧長 s を求める公式

$$s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)| dt$$

をこの場合に適用すれば良い.

$$\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

であるから, $|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 0^2} = 1$ となる. したがって,

$$s = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

と求まる. □

問題. $\boldsymbol{r} = (t, 2t^2, 0)$ により表される曲線 C[*2]の原点 P(0) = (0, 0, 0) における曲率 κ と曲率半径 ρ を求めよ.

解.

$$\boldsymbol{r}'(t) = (1, 4t, 0), \quad |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{1 + 16t^2}$$

より,

$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}}(1, 4t, 0)$$

となる. したがって, $\boldsymbol{t}$ の t での微分は

$$\boldsymbol{t}'(t) = \left(\frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{32t}{\sqrt{1+16t^2}}}{1 + 16t^2}, \frac{4\sqrt{1+16t^2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{32t}{\sqrt{1+16t^2}} \cdot 4t}{1 + 16t^2}, 0 \right)$$

となる. これらに $t = 0$ を代入し,

$$|\boldsymbol{t}'(0)| = |(0, 4, 0)| = 4, \quad |\boldsymbol{r}'(0)| = 1$$

となるので, $\kappa = \frac{4}{1} = 4$, $\rho = \kappa^{-1} = \frac{1}{4}$ となる. □

---

* 第 4 講 (2013 年 5 月 10 日) 配布プリント.

[*1] 何度も出てきたように, これは原点中心, 半径 1 の円でしたから, その周の長さは, 小学校で習ったとおり, 2π です.

[*2] $x = t, y = 2t^2$ から t を消去すると分かるように, この曲線は $z = 0$ (xy 平面) 内の放物線 $y = 2x^2$ です.

- 前回出た質問です[*3]. 曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ の各点の曲がり具合を表す量として, 「曲率」κ というものを定義しました. どのように計算される量かというと, s を曲線の長さとした時に,

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \frac{\left|\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\right|}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|}$$

として求まるものでした. 真ん中の項は, s の変化に対する $\boldsymbol{t}$ の変化の大きさですから, 「単位長さだけ点がずれた時に, 接線方向の向きがどれだけ変化したのか」を表す量だと言えます.

質問は, この曲率は $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ では求まらないのか, というものでした. これは 接線ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ の時間変化を表すベクトルですから, 確かに, 「接線方向の変化を表す量」と言えそうです.

結論としては, $\kappa \neq \left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ です. これは, $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ が接線ベクトルそのものも時間変化を見ているために, 向きだけでなく, その大きさ (点の移動する速さ) の情報も含まれてしまうためです.

前回, 授業で扱った原点中心, 半径 1 の円 $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, 0)$ の $t = 0$ における曲率 κ は 1 で, $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ もまた 1 になっていました. ここで, 「進み方」を変えて, 例えば,

$$\boldsymbol{r} = (\cos(t^3 + 2t), \sin(t^3 + 2t), 0)$$

としてみると, これも同じ原点中心, 半径 1 の円を表していますが, $t = 0$ において, 曲率は変わらず 1 ですが, $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ は 2 になってしまうことがわかります. 曲線としては, 同じ円なのですから, カーブの曲がり具合である曲率は, 同じであって欲しいですね. なので, $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ を曲率として採用するのは, 不適当であることがわかります.

2 前回・今回の復習問題

各自でどんどん解いてもらって構いませんが, こちらから何問か提示しておきます. こういった問題が解けるようにしておいてください.

第 4 講

教科書: p.17 問 14(2), p.19 問 15

問題集: p.10 例題, p:11 16(1), (2)

(16(2) は (u, v) の動く範囲が長方形ではないので, 重積分の変数変換を行う必要があります.)

[*3] やや難しい話題で, 曲率 (半径) の計算を公式通りにするだけなら, 特に考慮しなくて良いお話ですが, 深く理解する上では, 大変よい質問だったと思うので, 余力のある人は, 読んでみてください.