

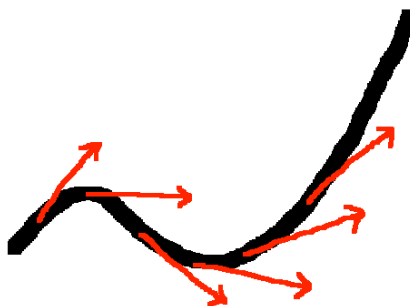
応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E) *

1 前回講義の補足

- 前回出た質問を取り上げます. 単位接線ベクトル t に対して, その微分 t' が t と直交するというのはなぜか?

これは, r の微分 r' が r の表す曲線 C の接線方向のベクトルなのだから, t という接線方向を表す直線的なベクトルに対しては, その微分は, 同じ向きになるのではないか? という趣旨の質問だったように思います.

t というベクトルは, 接線の方を向いていますが, 一定の向きを持ち続けるわけではなく, 時間とともに向きが変化します (下図).



矢印が各点における t を表しています. この矢印たちの始点を揃えて, 終点の動き方を描いたものが, ベクトル関数 $t(t)$ の描く曲線になりますが, これは直線ではなく, 半径 1 の円周上を動く曲線になります. こうして変化していく接線方向 t が, どの向きに変化していくかを表したベクトルが t' になります.

要約すると,

接線そのものと, $t(t)$ が時間変化して描く曲線とは, 同じものではないということになります. 混同しないようにしてください.

* 第 3 講 (2013 年 4 月 26 日) 配布プリント.

- 宿題 (、というか各自チェックしておくように指示した問題) に対する解答例です。

問題. 例 1-3-3 の $(a \cdot b)'$ の計算を公式 (V) を使わずに直接計算せよ.

解.

$$\begin{aligned}(a \cdot b)' &= (t^2 + 2t^2 + t^2(t-3))' \\ &= (t^3)' \\ &= 3t^2\end{aligned}$$

となり, 公式 (V) を使った計算結果と確かに一致する. \square

問題. 例 1-4-1 の単位従法線ベクトル b の計算結果を確認せよ. また, 求めた b が t, n と直交すること確かめよ.

解. 与えられた単位接線ベクトル t と単位従法線ベクトル n に対して, $b = t \times n$ であった.

これを「余因子展開」で計算すると,

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= e_x \begin{vmatrix} \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} - e_y \begin{vmatrix} \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix} + e_z \begin{vmatrix} \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t, -b \cos t, a)\end{aligned}$$

となる. また, 直交していることを見るには, 「内積 = 0」(第 1 講参照) を調べれば良いが,

$$\begin{aligned}b \cdot t &= \frac{1}{a^2 + b^2} (-ab \sin^2 t - ab \cos^2 t + ab) = 0 \\ b \cdot n &= \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} (-b \sin t \cos t + b \sin t \cos t + 0) = 0\end{aligned}$$

となるので, 確かに b は t と n の両方に直交している. \square

2 前回・今回の復習問題

各自でどんどん解いてもらって構いませんが, こちらから何問か提示しておきます. こういった問題が解けるようにしておいてください.

前回

教科書: p.9 問 8, 問 9 p.11 例題 1, 問 10

今回

教科書: p.12 例題 2, p.13 問 12, p.15 例題 3

問題集: p.8 6(1)