

応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E) *

1 前回講義の補足

- ベクトルは「向き」と「大きさ」をもった空間 (平面) 内の矢印, と説明しましたが, 0 ベクトル $\mathbf{0}$ については, その向きは考えないこととします.*¹

前回講義で述べた, この部分の説明は, イメージを思い出してもらおうための説明で, 正確な定義ではありませんでした. 正確な定義は, 線形代数の教科書やノートを見返しておきましょう.

- 平行六面体の部分について, もう一度復習しておきます.*² $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がこの順に右手系*³をなすとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のなす平行六面体の体積 V は,

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

となります. (右手系, 左手系, ということがややこしければ, $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ というように, 絶対値をつけて覚えてしまっても良いでしょう.)

その証明ですが, 次ページのような平行六面体を考え, $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$ とします.

斜線部を底面積 S と見ると, 平行六面体の高さは図の h となります. 図のように角度 θ を取れば,

$$h = |c| \cos \theta \quad (1)$$

となります. 一方, 外積の定義から, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は高さ方向のベクトルで, その大きさは \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす平行四辺形の面積なので

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ と } \mathbf{c} \text{ のなす角は } \theta, \quad S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad (2)$$

* 第2講 (2013年4月19日) 配布プリント.

*¹ 質問してくれた方, ありがとうございます

*² 問題集の p.9 も参照してみてください.

*³ 授業では, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ と同じような位置関係にあるとき, と説明しました. きちんと定義をすると, 行列式

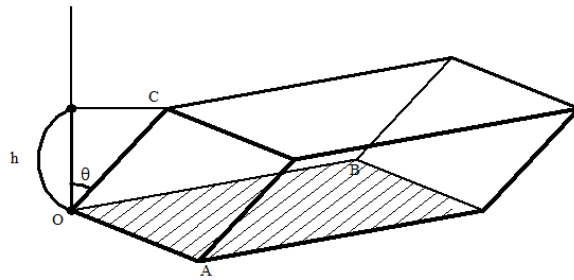
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0 \text{ が成り立つ, ということが, 「} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ がこの順に右手系をなす」ということの定義です.}$$

この行列式が負の場合を左手系, と言います (0 になる時は, 線形代数で習ったように, 3 つのベクトルが基底になりません).

です。このとき,

$$V = Sh = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \theta \quad (3)$$

となりますが, 内積の定義を思い出せば, この右辺は $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ となります。



2 前回授業の復習問題

各自でどんどん解いてもらって構いませんが, こちらから何問か提示しておきます。こういった問題が解けるようにしておいてください。

教科書: p.3 問 2, p.6 問 4, 問 5, p.9 問 7(1)

問題集: p.9 問 12

3 定期テストについて

- 前回質問のあった試験時間については, 中間, 期末とも 60 分で行います。日程は後日発表されます。
- 中間試験範囲 (予定): 教科書 pp.1-31, 問題集 pp.6-14, その他授業で扱った内容。
- 期末試験範囲 (予定): 教科書 pp.32-51, 問題集 pp.15-17, その他授業で扱った内容 (ただし, 当然中間試験で扱った概念は問題中に出てきます)。
- 問題の難易度は, 教科書の例題, 問, 練習問題程度。直前に想定問題のようなものを作って欲しい, という提案がありましたが, これから何回か行う予定の小テストで, おおよその出題の雰囲気を知ってください (ということで, 直前に想定問題を配るようなことはしないと思っています)。