科目: 応用数学 I　　担当: 植松 教員

学科 (組): 4X　　出席番号: ∞　　氏名:　　椚田 数雄

後期期末試験 解答例

1.

(1)

$$\underline{z(t) = (1+i)t \ (0 \leqq t \leqq 1)}.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_C (z^2 + iz + 3)dz &= \int_0^1 \{(1+i)^2 t^2 + i(1+i)t + 3\} \cdot (1+i)dt \\ &= \left[\frac{(1+i)^3}{3}t^3 + \frac{i(1+i)^2}{2}t^2 + 3(1+i)t\right]_0^1 \\ &= \underline{\frac{4}{3} + \frac{11}{3}i}.\end{aligned}$$

2.

$$f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2}\right)$$

である. $f(z)$ の孤立特異点は $z = \pm 2$ である.

(1) C_1 の内部には $z = \pm 2$ ともにないので, $f(z)$ は C_1 の周上及び内部において正則である. よって, Cauchy の積分定理により,

$$\underline{\int_{C_1} f(z)dz = 0.}$$

(2) C_2 の内部には 孤立特異点 $z = 2$ のみが含まれるので, Cauchy の積分定理と積分表示により,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(z)dz = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4} \quad \therefore \underline{\int_{C_2} f(z)dz = \frac{\pi}{2}i.}$$

(3) C_3 の内部には, $z = 2$ も $z = -2$ も共に含まれるから, Cauchy の積分表示より,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} f(z)dz = \frac{1}{4}(1-1) = 0 \quad \therefore \underline{\int_{C_3} f(z)dz = 0.}$$

3.

(1) e^w の Taylor 展開

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \cdots$$

に $w = \dfrac{1}{z}$ を代入し, z^2 を乗じることにより,

$$\underline{z^2 e^{\frac{1}{z}} = \cdots + \frac{1}{n! z^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{3! z} + \frac{1}{2!} + z + z^2, \quad (|z| > 0)}_{(a)}$$

となる. また, 孤立特異点 $z = 0$ は <u>真性特異点</u>$_{\text{(b)}}$ である.

(2) $\sin z$ の Taylor 展開

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

を z で割ることにより,

$$\underline{\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (\text{複素数平面全体で収束})}_{(a)}$$

となる. *1 また, 孤立特異点 $z = 0$ は $\underline{\text{除去可能特異点}}_{(\mathrm{b})}$ である.

(3) $\dfrac{1}{z+1}$ の Taylor 展開

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, \quad (|z| < 1)$$

を z^2 で割ることにより,

$$\underline{\frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - \cdots + (-1)^n z^{n-1} + \cdots, \quad (0 < |z| < 1)}_{(a)}$$

を得る. また, 孤立特異点 $z = 0$ は $\underline{\text{位数 2 の極}}_{(\mathrm{b})}$ である.

4.

$z = 0$ **について:**

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \frac{1}{\pi^2}$$

は 0 でない値に収束するので, $f(z)$ の孤立特異点 $z = 0$ は位数 1 の極である. したがって, $f(z)$ の $z = 0$ における留数は,

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \underline{\frac{1}{\pi^2}}.$$

$z = \pi$ **について:**

$$\lim_{z \to \pi} (z - \pi) f(z) = \infty, \quad \lim_{z \to \pi} (z - \pi)^2 f(z) = -\frac{1}{\pi} \neq 0$$

となるので, $f(z)$ の孤立特異点 $z = \pi$ は位数 2 の極である. したがって, $f(z)$ の $z = \pi$ における留数は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to \pi} \frac{d}{dz} \left\{ (z-\pi)^2 f(z) \right\} &= \lim_{z \to \pi} \frac{ie^{iz} \cdot z - e^{iz} \cdot 1}{z^2} \\ &= \underline{\frac{1 - \pi i}{\pi^2}}. \end{aligned}$$

---

*1 はじめから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ というべき級数が与えられていれば, 収束領域は全平面ですが, いまは, $\dfrac{\sin z}{z}$ の ローラン展開として, この式が出てきたので, $f(0) = 1$ と定義することにしなければ, そもそも $z = 0$ は定義域の点ではなく, その意味では, 収束領域は $|z| > 0$ となります. 出題意図としては, 前者のつもりでしたが, 問題文が曖昧で, どちらの意味にも取れるので, (2)(a) については全員正解としています.

応用数学 I 後期期末試験 講評[*2]

皆様お疲れ様でした．それでは, 早速, 配点とコメントです．

問題 1. 14 点 (1) 4 点 (2) 10 点

(1) $1+i$ から 0 に向かっている人が何人かいました．$t=0$ を代入したときに, 0, $t=1$ を代入したときに $1+i$ になることを確かめましょう．

(2) 概ね良く出来ていました．**解答例**では, 定義通りに z に $z=(1+i)t$ を代入して計算していますが, 関数 z^2+iz+3 は (単連結領域である) 全平面で正則であり, 不定積分をもつので, それを用いた解法も見られました．

問題 2. 21 点 各 7 点

与えられた関数の特異点 (極) の位置に注目して, Cauchy の積分定理や積分表示の理解を問う基本的な問題です．そもそも与えられた $C_2:|z-2|=2$ に対し,「$|z-2|=2$ だから, $z=0,4$」など, 平面上の円を表すことを理解できていないものも見られましたが, それ以外でも, 積分定理・表示を使えていない人が目立ち, (2), (3) の正答率は半分程度でした．**解答例**では部分分数分解から, 解いていますが, 授業最終回に扱った留数定理を利用して解いている方もいました．

問題 3. 45 点 各 15 点

複素関数のローラン展開を求め, 収束領域と, 特異点の種類を答える問題です．どれも授業中や, レポートなどで扱った問題 (と本質的に同じ) ですが, 平均点が 4 点, 8 点, 6 点と予想以上に出来が悪かったです．テイラー展開は関数値の近似計算などの基礎となる事項ですから, 必ずできるようになって下さい．

(1) $e^0=e$ としたのか, 係数がすべて e になっている人がちらほらいました．また,「収束半径は ∞」のように答えている人が多かったですが, 聞かれているのは, 収束領域です．そもそも中心で定義されていないローラン展開においては収束半径という言葉は使いません．

(2) $\sin z$ の一般項を $(-1)^n z^n/(2n+1)!$ など, 正しく答えられていないものが見られました．また, $\cos z$ の展開を答えている人もいました．後者については, $z=0$ を代入すれば, すぐに気付けるはずです．

(3) **解答例**のように無限等比級数の和を利用しない直接的な解法では, $1/(z+1)$ の n 階導関数は正しく求められたのに, テイラー展開の係数 $f^{(n)}(0)/n!$ の $n!$ を忘れて, 間違えている人が見られました．とにかく展開式を正しく覚えて下さい．

問題 4. 20 点

留数の計算です．孤立特異点は両方とも極であることがわかりますから, 授業の最後に扱った, 計算公式に当てはめる, ということになります．(1) はそれなりにできていました．(2) は分母だけ払って, $z\to\pi$ という人が多かったです．極限を取る前に, 微分をする必要があります．正しく覚えておきましょう．もちろん, ひとまずは, 覚えて使いこなせることが第一ですが, 授業で説明した

[*2] 第 16.75 講 (2014 年 2 月 21 日) 配布．復習の便宜のため, 2 月 13 日に先行アップロード．2 月 17 日に追試要件を変更．

ように, 「関数をべき級数展開したとして, 分母を払って, 微分して次数下げをして, もとのべき級数の -1 乗の項の係数を取り出している」という公式の意味をきちんと理解することも忘れないで下さい.

追試験について

後期の中間期末を通じた総合成績が現時点で D(59 点以下) の学生に対して, 追試験とレポートを課します.[*3] 該当者には, 個別に通知します.

- 試験範囲等: 後期期末試験に準ずる (試験時間は 60 分, 持ち込みなし).
- 試験注意: 小テスト, レポート, 特に本試験の出題内容をよく見なおしておくこと.
- レポート: 本試験の問題の解き直しを学生課に提出. **締切は追試験の前日 17 時まで.** 途中式や説明も丁寧に書いて下さい.[*4]

[*3] これにより, 後期の成績を算出し, 前期の評価と合わせて学年の総合評価とします.

[*4] 言うまでもないことですが, 出来る限り教科書・ノートを見て自分の力で解き, 行き詰まったら, 解答例を見るなり, (私を含めた) 他の人に質問・相談するようにして下さい.