応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度後期, 4M/4E)

第 5 回小テスト (第 14 講 (2014 年 1 月 17 日) 実施)

クラス・番号:　　　　　　　氏名:

以下の各問に答えよ. 試験時間 15 分.

注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.

1. 複素数平面上における原点中心, 半径 2 の円を C とする.

(1) C の実数のパラメータ t による表示をひとつ求めよ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z}{z-3i}dz$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^3}{(z-1)^3}dz$ を求めよ.

解答例.

(1)

$$\underline{z(t) = 2e^{it}, \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)}$$

(2) 積分される関数 $\dfrac{z}{z-3}$ は, 定義されない点 $z = 3i$ が円 C で囲まれる領域の外側にあり, それ以外のところでは正則であるから, とくに, 円 C の内部で正則. したがって, Cauchy の積分定理により,

$$\int_C \frac{z}{z-3i}dz = \underline{0}.$$

(3) 積分される関数 $\dfrac{z^3}{(z-1)^3}$ は, $z = 1$ を除いたところで正則であり, これは円 C の内部の点である. そこで, Cauchy の積分表示 (n 階導関数の積分表示)

$$g^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz, \quad \alpha\text{は円 } C \text{ の内部の点}$$

を, $g(z) = z^3, \alpha = 1, n = 2$ として適用すれば,

$$(z^3)''|_{z=1} = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{z^3}{(z-1)^3}dz$$

となる.[*1] ここで, $g'(z) = 3z^2, g''(z) = 6z$ であるから,

$$\int_C \frac{z^3}{(z-1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot 6 = \underline{6\pi i}.$$

問題は裏にもあります.

[*1] $(z^3)''|_{z=1}$ は, $(z^3)''$ の計算結果に, $z = 1$ を代入した値, という意味である.

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

2. 次の正則関数の与えられた点 $z=\alpha$ を中心とするテイラー展開を求めよ．また, そのべき級数展開の収束半径を求めよ．ただし, テイラー展開は,

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{あるいは} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

のように, 一般項が分かる形で書くこと．

(1) e^z, $\alpha = 1$

(2) $\dfrac{1}{3-z}$, $\alpha = 2$

解答例.

$z=\alpha$ を中心とする円 $|z-\alpha|<R$ において正則な関数 $f(z)$ は, その円内において, 次のようにべき級数展開できる (Taylor 展開):

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n + \cdots .$$

(1) $f(z)=e^z$ に対し, $f'(z)=e^z$ であり, 一般に $f^{(n)}(z)=e^z$ であることが分かる．したがって, すべての n に対し, $f^{(n)}(1)=e$ となるので,

$$e^z = e + e(z-1) + \frac{e}{2}(z-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(z-1)^n + \cdots$$

となる．また, 関数 e^z は全複素平面上正則であるから, 収束半径は ∞ である．

(2) $f(z) = \dfrac{1}{3-z}$ とおく．すべての $n \geqq 0$ に対し, $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{(3-z)^{n+1}}$ となることを数学的帰納法により示す．($f^{(0)}(z)$ は一度も微分しない, つまり $f(z)$ を意味するものとする．)

$n=0$ のとき, 成り立つ．

$n=k$ のとき成り立つとして, $n=k+1$ のとき,

$$f^{(k+1)}(z) = (f^{(k)}(z))' = \left(\frac{k!}{(3-z)^{k+1}}\right)' = k! \cdot \frac{k+1}{(3-z)^{k+2}} \cdot (3-z)' = \frac{(k+1)!}{(3-z)^{k+2}}$$

となり成り立つ．

以上より, すべての n に対して, $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{(3-z)^{n+1}}$ となることが示された．

したがって, $f^{(n)}(2) = n!$ となるので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-z} &= 1 + (z-2) + \frac{2!}{2!}(z-2)^2 + \cdots + \frac{n!}{n!}(z-2)^n + \cdots \\ &= 1 + (z-2) + (z-2)^2 + \cdots + (z-2)^n + \cdots\end{aligned}$$

となる．また, $\dfrac{1}{3-z}$ が, $z=3$ 以外では正則であることに注意すると, べき級数展開は $|z-2|<1$ で意味を持つ, つまり収束半径は 1 である．

応用数学 I 第 5 回小テスト 講評[*2] [*3]

問題 1. 10 点 (1) 3 点 (2) 3 点 (3) 4 点

(1) 式自体は書けている人が多かったですが, t の変域に言及していない人が多かったです. $0 \leqq t \leqq \pi$ だったら半円にしかならないわけですから, 変域を明示する必要があります. [*4] 式が書けなかった人, 答が円を表すことがわからない人は, 1 月 10 日に配布したプリントの解説や教科書を読むか, 質問してください.

(2) $z = 3i$ が円の中にあるか外にあるか, という議論を経ずに, Cauchy の積分表示を使っている人が結構いました.

(3) $n!$ を忘れているもの, $n+1$ 乗の部分など, 公式を正しく覚えられていない人が多かったです.

問題 2. 10 点 各 5 点

(1) 展開の中心が $\alpha = 1$ なのに, z^n のベキ級数にしているもの, 微分係数のところを, e^z にしているなどの不備が目立ちました. $w = z - 1$ と「平行移動」して, $e^z = ee^w$ を $w = 0$ でテイラー展開 (マクローリン展開) して, 最後に z の式に戻している人も何人かいました. マクローリン展開に慣れているのなら, そのような工夫をして解いても良いと思います. 収束半径は, **解答例.** のように元の関数の正則性から議論をしてもよいですし, 求めたべき級数にダランベールの収束判定法を適用して,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{e}{(n+1)!}}{\dfrac{e}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

から, 収束半径が無限大であることを導いてもよいでしょう.

(2) $n = 1, 2, 3$ くらいを調べて, $f^{(n)}(z)$ を推測することになりますが, この式を書いていない人, 正しく推測できていない人が多かったです. (厳密には, 推測は推測に過ぎませんから, 正しいことを**解答例.** のように数学的帰納法で証明する必要があります.) また, 授業中にも説明したように, 無限等比級数の和の公式

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^n \cdots = \frac{1}{1-w}, \quad |w| < 1$$

を利用した方法もあります. ここでは, 次の例題を通して, その解法を復習しておきます.

[*2] 第 15 講 (2014 年 1 月 24 日) 配布. 復習の便宜のため, 1 月 18 日に先行アップロード.

[*3] 内容には関係ないですが, 質問があったので, ちょっと紹介しておきます. このプリントやテストなどは pLaTeX 2ε を用いて作成しています. 原型となっている TeX(テフ) は, Donald E. Knuth により, 1978 年に開発された, 数式や文章の美しい組版を行うためのフリーのソフトウェアで, 数学をはじめとして, 自然科学・工学などの教科書や論文作成のために世界中で使われています. 例えば, Taylor 展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ を出力するとき, 私は, `\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{n}(0)}{n!} z^n` と打ち込んでいます. まだ使ったことのない方も, 将来使うことがあるかもしれません.

[*4] $0 \leqq t \leqq 5\pi$ のように 2 周半しても, 複素数平面に描かれる円としては, 見た目は同じものになる訳ですが, 教科書やこの授業では, 特に断らない限り, 単に「円」と言ったら, ちょうど 1 周するものを指しています.

例題. $\dfrac{1}{2+2z}$ を $z=2$ でテイラー展開せよ. また, そのべき級数展開の収束半径を求めよ.
解答例.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+2z} &= \frac{1}{6+2(z-2)} \ (z-2 \text{ をつくる}) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}(z-2)\right)} \ (\text{分母を } 1-w \text{ の形にする}) \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\left(-\frac{1}{3}(z-2)\right)+\left(-\frac{1}{3}(z-2)\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}(z-2)\right)^n+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{6}-\frac{1}{18}(z-2)+\frac{1}{54}(z-2)^2-\cdots+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(z-2)^n+\cdots\end{aligned}$$

となる. 収束半径について考えると, 「w にあたるもの」の大きさが 1 より小さければよいので,

$$\left|-\frac{1}{3}(z-2)\right|<1 \quad \therefore |z-2|<3$$

となり, 収束半径は 3 となる. (もちろん, $\dfrac{1}{2z+2}$ の孤立特異点 $z=-1$ と $z=2$ の距離を考えて $|2-(-1)|=3$ としてもよい.)