応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度後期, 4M/4E)

第 4 回小テスト (第 12 講 (2013 年 12 月 20 日) 実施)

クラス・番号:　　　　　　　　氏名:

以下の各問に答えよ. 試験時間 12 分.

注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.

1. 1 から $2+i$ に至る線分を C_1, 中心 i, 半径 2 の円を C とする.

(1) C_1 の実数のパラメータ t による表示をひとつ求めよ.

(2) C_2 の実数のパラメータ t による表示をひとつ求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z-i}dz$ を Cauchy の積分定理などは使わずに 定義から直接求めよ.

解.

(1)

$$\underline{z(t) = (1-t)\cdot 1 + t(2+i)(= (1+i)t+1) \quad (0 \leqq t \leqq 1)}.$$

(2)

$$\underline{z(t) = i + 2e^{it} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)}.$$

(3) (2) で求めたパラメータ表示を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{1}{z-i}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt \\ &= \underline{2\pi i}.\end{aligned}$$

問題は裏にもあります.

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

2. 原点中心, 半径 4 の円を C とする. 次の関数の C に沿った複素積分を求めよ. ただし, $\pi = 3.14159265358979323846\cdots$ であることは使ってよい.

$$(1)\ f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-6)} \quad (2)\ g(z) = \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}$$

解.

(1)

$$\frac{z}{(z-2)(z-6)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{z-6} - \frac{1}{z-2}\right)$$

だから,

$$\int_C f(z)dz = \frac{3}{2}\int_C \frac{1}{z-6}dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z-2}dz$$

となる. ここで, 第 1 項は, $z=6$ が C の外側にある, すなわち, $\dfrac{1}{z-6}$ が C の内部で正則であることから, Cauchy の積分定理により, その値は 0 となる. 一方, 第 2 項は, $z=2$ が C の内部に含まれていることから, Cauchy の積分表示

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

を, $f(z)=1$ (定数関数), $\alpha = 2$ として用いることにより, その値は $\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot f(2) = \pi i$ となる. したがって, 求める積分の値は $0 - \pi i = \underline{-\pi i}$.

(2) $z = \pi$ は C の内部に含まれていることから, n 次導関数の積分表示公式

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

において, $n=2$, $f(z) = e^{iz}$, $\alpha = \pi$ とすることにより,

$$\int_C g(z)dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot f''(\pi)$$

となり, ここで, $(e^{iz})'' = -e^{iz}$ より, $f''(\pi) = -e^{\pi i} = 1$ であるから, 求める積分の値は $\underline{\pi i}$ となる.