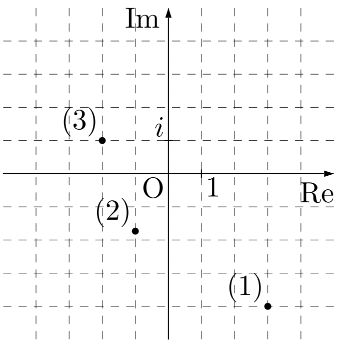
科目: 応用数学 I　　担当: 植松 教員

学科 (組):　　出席番号:　　氏名:

後期中間試験 解答例

問題 1. の解答欄



2.

(1) $2(3-i)+i(\overline{5+2i}) = 6-2i+i(5-2i) = 6-2i+5i+2 = \underline{8+3i}.$

(2) $\dfrac{|3-4i|}{2-i} = \dfrac{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \underline{2+i}.$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2013} = \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{2013} = e^{335\pi i} = \underline{-1}.$

3.

(1) 2 次方程式の解の公式より,

$$z = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot3}}{2} = \underline{1\pm\sqrt{2}i}.$$

(2) $z = re^{i\theta}$ $(r>0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと, $r^3e^{3i\theta} = -8i$ となり, 絶対値を比較して, $r^3 = 8$ から $r = 2$ が求まる. このとき, $e^{3i\theta} = -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$ であるから, $0 \leqq 3\theta < 6\pi$ に注意すると, $3\theta = \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{7}{2}\pi, \dfrac{11}{2}\pi$ となる. したがって, $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$ となるから,

$$z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}, 2e^{\frac{7}{6}\pi i}, 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \underline{2i, \pm\sqrt{3}-i}.$$

4.

(1) $e^{1+\frac{\pi}{2}i} = e\cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = \underline{ei}.$

(2) $\cos i = \dfrac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \underline{\dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{e}\right)}.$

(3) $\log(1+i) = \log|1+i| + i\arg(i+i) = \underline{\log\sqrt{2}+\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)i \ (n \text{ は整数})}.$

(4) $\mathrm{Log}(-i) = \log|-i| + i\arg(-i) = \log 1 + \left(-\dfrac{\pi}{2}i\right) = \underline{-\dfrac{\pi}{2}}i$ $(-\pi < \arg(-i) \leqq \pi$でとる$)$.

5.

(1) $f(z) = \overline{z} = x - yi$ であるから, $u(x,y) = x, v(x,y) = -y$ とおくと,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となるので, $f(z)$ の実部と虚部は, Cauchy-Riemann 方程式を満たさず, よって, $f(z)$ は正則ではない.

(2) $u(x,y) = x^2 - y^2 - y - 1, v(x,y) = 2xy + x$ とおくと,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となるので, $f(z)$ の実部と虚部は, Cauchy-Riemann 方程式を満たす. よって, $f(z)$ は正則である. このとき,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \underline{2x + (2y+1)i}(= 2z + i).$$

6.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial(3x^2 - 3y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-6xy)}{\partial y} = 6x + (-6x) = 0$$

となるので, $u(x,y)$ は調和関数である. 虚部 $v(x,y)$ について, Cauchy-Riemann 方程式から, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$ となるので, 両辺を x で積分すると, $v(x,y) = 3x^2y + g(y)$ と書ける (ここで, $g(y)$ は y のみに依存する関数). すると, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ であることから, $3x^2 + \frac{dg}{dy} = 3x^2 - 3y^2$ を得, したがって, $\frac{dg}{dy} = -3y^2$ となる. これより, $g(y) = -y^3 + c$ (c は実数) とわかり,

$$f(z) = u + iv = \underline{(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3 + c)i}(= z^3 + ci)\ \underline{(c \text{ は実数})}.$$

応用数学 I 後期中間試験 講評[*1]

皆様お疲れ様でした. それでは, 早速, 配点とコメントです.

問題 1. 15 点 各 5 点

(1) ほぼすべての人ができていました. (2) 偏角を間違えている人が何人かいた他は概ね出来ていました. (3) 実部も -1 倍して, $2+i$ としてしまっている人がいました. 共役の意味をもう一度確認しておきましょう.

問題 2. 17 点 (1) 5 点 (2) 5 点 (3) 7 点

(1) 共役が分かるか, $i^2 = -1$ が使えるか, 複素数のたし算ひき算ができるか, ですが, よく出来ていたと思います. (2) 絶対値が分かるか, 分母の複素数の処理ができるか, がポイントです. ちらほら分子を $(3-4i)$ として計算している人がいました. 共役複素数 $2+i$ を分子分母にかける, というところは良く出来ていました. (3) 極形式に直して, 偏角 $\pi/3$ を 2013 倍すればよい, という問題です. よく出来ていました.

問題 3. 15 点 (1) 5 点 (2) 10 点

(1) 中学校でも習った「解の公式」を使うのが一番手っ取り早い解き方です. 解の公式を導く時の手順を追って, $(z-1)^2 = -2$ と平方完成して解いている方も多かったですが, 平方根を取るときに, 左辺を $\sqrt{2}i$ と $\pm$ を忘れている人が少なからずいました. $z = a+bi$ と置くことでも解くことが出来ます. (2) 「$a+bi$ の形で」の指示に従っていない答が目立ちましたが, その手前までは解けている (本質的にわかっている) 人は多かったように思います.

問題 4. 28 点 各 7 点

(1) $\cos(1+\pi/2) + i\sin(1+\pi/2)$ のような変形をしてしまっている人がちらほらいました. オイラーの公式そのものではないことに注意してください. (2) 白紙が多かった問題ですが, $\cos z$ の定義が押さえられている方にとっては簡単で, 解いている人はほぼ正解でした. (3) 定義は「e を何乗したら $1+i$ になるか」ですから, $e^{a+bi} = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ として, a, b を求めれば良いのでした. 大きさが $e^a = \sqrt{2}$ から $a = \log\sqrt{2}$, 偏角が $b = \pi/4 + 2\pi n$ (n は整数) となります. 闇雲に公式を覚えず, log の意味を押さえましょう. (4) は偏角 θ の範囲が $-\pi < \theta \leq \pi$ に限定されますが, $3\pi/2$ としている人が非常に多かったです.

問題 5. 15 点 (1) 6 点 (2) 9 点

平均点は 13.5 点. 非常に良く出来ていました. C-R 方程式を $u_x = -v_y, u_y = v_x$ など正しく覚えられていない人のほか, $u_x = v_y$ と $u_y = -v_x$ のどちらか一方だけ検証すれば良いと勘違いしている人がいましたので, もう一度確認してください.

問題 6. 10 点

調和関数であることの証明はほぼ全員できていました. 虚部の構成の方は, x と y を取り違えていたり, 記述が不十分だったり, というのが目立ちました. また, 解はひとつ求めれば良いのですが, 積分定数込みで答えていた場合, 「c は実数」は欠かせない条件なので, これが明記されていない場合は減点しています.

[*1] 第 10 講 (2013 年 12 月 6 日) 配布. 復習の便宜のため, 11 月 30 日に先行アップロード.

課題

テストが 69 点以下だった人は, 以下の要領でレポートを提出してください.

- 問題: 問題集 **95** (1), (3), **96** (3), **100** (1), (2), (5), **101** (3), **108** (1), **112** (1), (3)
- 様式: A4 レポート用紙, クラス番号, 名前を明記のこと. 解答は, 答のみでなく, 途中式も記すこと.
- 提出: 学生課に 12 月 13 日 (木)17:00 まで.

その他

- 中間試験までの小テストを休んで受けていない, また, レポートを提出していない場合は, 今からでも提出していただければ, 後期期末評価時に出席点など (25 点分) に加算します. (小テスト, レポートの問題は私のホームページ[*2]においてあります.) 今後の小テストについても同様です.
- 忌引・公欠などは, 欠席した回の授業ノートを私が確認することを持って, 出席とみなします. こちらから, 繰り返しアナウンスすることはないので, 当該学生は各自見せに来てください.

[*2] URL は `http://pantarhei.yu-yake.com/ja/teaching.html` です.