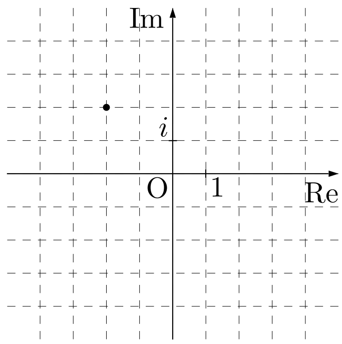
科目: 応用数学 I　　担当: 植松 教員

学科 (組):　　出席番号:　　氏名:

第 3 回小テスト 解答例

問題 1. の解答欄



2.

(1) $(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = 8e^{\frac{3}{2}\pi i} = \underline{-8i}.$

(2) $\log(-2) = \log|-2| + i\arg(-2) = \underline{\log 2 + (\pi + 2\pi n)i\ (n \text{ は整数})}.$

3. $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと, $r^4 e^{4i\theta} = -16$ となり, 絶対値を比較して, $r^4 = 16$ から $r = 2$ が求まる．このとき, $e^{4i\theta} = -1 = e^{\pi i}$ であるから, $0 \leqq 4\theta < 8\pi$ に注意すると, $4\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ となる．したがって, $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{5}{4}\pi, \dfrac{7}{4}\pi$ となるから,

$$z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}, 2e^{\frac{3}{4}\pi i}, 2e^{\frac{5}{4}\pi i}, 2e^{\frac{7}{4}\pi i} = \underline{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i\ (\text{複合任意})}.$$

4. $u(x,y) = -2xy + x, v(x,y) = x^2 - y^2 + y$ とおくと,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となるので, $f(z)$ の実部と虚部は, Cauchy-Riemann 方程式を満たす．よって, $f(z)$ は正則である．このとき,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \underline{-2y + 1 + 2xi}(= 2iz + 1).$$

5. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial(2x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(-2y)}{\partial y} = 2 + (-2) = 0$ となるので, $u(x,y)$ は調和関数である．虚部 $v(x,y)$ について, Cauchy-Riemann 方程式から, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$ となるので, 両辺を x で積分すると, $v(x,y) = 2yx + g(y)$ と書ける (ここで, $g(y)$ は y のみに依存する関数)．すると, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ であることから, $2x + \dfrac{dg}{dy} = 2x$ を得, したがって, $\dfrac{dg}{dy} = 0$ となる．これより, $g(y) = c$ (c は実数) とわかり,

$$f(z) = u + iv = \underline{(x^2 - y^2) + (2xy + c)i}(= z^2 + ci)\ \underline{(c \text{ は実数})}.$$