応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度後期, 4M/4E)
第 2 回小テスト (第 6 講 (2013 年 11 月 1 日) 実施)

クラス・番号:　　　　　　　　氏名:

以下の各問に答えよ. 試験時間 15 分.
注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.
1. 次の複素数を $a+bi$ の形のものは極形式に, 極形式は $a+bi$ の形に直せ.

$$(1)\ -1-i \quad (2)\ 4e^{\frac{2}{3}\pi i} \quad (3)\ -2i \quad (4)\ e^{2013\pi i}$$

解. (1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ ($\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$ でもよい)
(2) $-2+2\sqrt{3}i$
(3) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ ($2e^{\frac{3}{2}\pi i}$ でもよい)
(4) -1

2. $z^3=-2+2i$ を解け. ただし, 答は $a+bi$ の形で答えること.
解. $z=re^{i\theta}$ $(r>0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと, 方程式は, $r^3e^{3i\theta}=-2+2i$ と書ける. 両辺の絶対値をとって,

$$r^3 = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = (\sqrt{2})^3 \quad \therefore r=\sqrt{2}$$

と求まる. また, このとき,

$$2\sqrt{2}e^{3i\theta} = -2+2i \Leftrightarrow e^{3i\theta} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

となるので, $0 \leqq 3\theta < 6\pi$ に注意すると,

$$3\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \frac{19}{4}\pi \quad \therefore \theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

と求まる. 以上より,

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}(=1+i), \sqrt{2}e^{\frac{11}{12}\pi i}, \sqrt{2}e^{\frac{19}{12}\pi i}.$$

3. $\sin z, \cos z$ を指数関数を用いて表せ (講義で扱った定義式を書け).
解.

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

(直接覚えても良いし, 実数 θ に対して, オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

が成り立つように定義したので, この 2 式を, $\cos\theta, \sin\theta$ について解いて, θ を z に置き換えてもよい.)

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

4. 次の $z = x + yi$ の関数 $f(z)$ が正則かどうかを (Cauchy-Riemann 方程式を用いて) 判定せよ. また, 正則であるときは, 導関数を求めよ.

$$(1)\ f(z) = x^2 + y^2 \quad (2)\ f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

解.

(1) $f(z) = u + iv$ の形と見れば, $u(x,y) = x^2 + y^2, v(x,y) = 0$ であるから,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

となる. これらは Cauchy-Riemann の関係式を満たさないので, $f(z)$ は正則ではない.

(2) $f(z) = u + iv$ の形と見れば, $u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$ であるから,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

となる. これらは Cauchy-Riemann の関係式を満たすから, $f(z)$ は正則であり, また導関数 $f'(z)$ は

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2yi$$

と求まる.

第 2 回 小テスト 講評[*1]

1. 各 2 点× 4

極形式に直すときは, 図示して, 偏角と絶対値 (原点からの距離) を調べればよいのでした. 前回の講評でも述べたように, (3) で, $-2i = -2e^{\frac{\pi}{2}i}$ のような解答は不正解としてあります. その他では, $e^{\frac{5}{4}\pi}$ のように, 指数に i を入れ忘れている人が意外と多かったです. $e^{\frac{5}{4}\pi i}$ と $e^{\frac{5}{4}\pi}$ はもちろん違う数ですので, 気をつけてください. $\cos\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{1}{2}$ としているなどのミスにも気をつけてください.

2. 5 点

これも, $z = re^{i\theta}$ と極形式表示して, 絶対値と偏角を決めていけばよいですが, $-2+2i$ を $2(-1+i)$ と変形して, 絶対値 2 と答えたり, また -2 のように負の値を答えているものが結構ありました. こんな余計な変形をしたりせず, 解答に示したように, 定義通りに $2\sqrt{2}$ が求められるようにしておいてください.

3. 各 2 点× 2

これは, 直接覚えるか, オイラーの公式から導出できるかどうか, というだけです. 変数は z ですが, オイラーの公式につられて, $e^{i\theta}$ のように, θ にしている人がいましたので, 注意してください. $\cos z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ のようにしてしまった人は, 例えば, $z = \dfrac{\pi}{2}$ とした時に, おなじみの $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ が出てこないことから, そのおかしさに気づけたはずです.

4. (1)3 点 (2)4 点

(1) $w = u + iv$ と表示することを考えるのですが, $u = x^2$, $v = y^2$ と勘違いしたと思われる人がいました. v は虚部に対応する 2 変数関数ですから, この $f(z)$ に対しては $v(x, y) = 0$ です. 気をつけてください.

解答の書き方が良くない人も目立ちました. いきなり「$2x \neq 0$. よって正則でない.」のように書かれても, まず, $2x$ や 0 がどこから出てきたのか不明ですし,「よって」だけでは, ちゃんと Cauchy-Riemann 方程式を覚えていて, その上できちんと結論づけたのかどうかこちらには判断できません.

(2) 導関数が求められていない人が見られました. 解答で示した式, あるいは微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ を押さえておきましょう.

なお, (1) について $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ ということが見抜ければ, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z \neq 0$ ということから, $\overline{z}$ での微分が消えない[*2]ので, $f(z)$ は正則でないとわかります. 同様に, (2) は $f(z) = z^2$ なので, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ より正則で, 導関数は $f'(z) = 2z = 2(x + yi)$ と求めることが出来ます.

[*1] 第 4 講 (2013 年 11 月 8 日) 配布.

[*2] もともとは,「$\overline{z}$ での偏微分」は $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ で定義される演算子ですが, 関数を z と $\overline{z}$ の式で表した時には, あたかも, z と $\overline{z}$ が独立な変数であるかのように, 普通に偏微分したものと考えても同じ結果になるのでした.