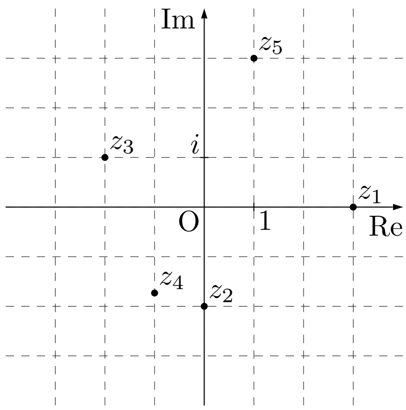
応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度後期, 4M/4E)
第 1 回小テスト (第 3 講 (2013 年 10 月 11 日) 実施)

クラス・番号:　　　　　　　氏名:

---

以下の各問に答えよ. 試験時間 12 分.
注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.
**1.** 次の複素数を図示せよ.

$$(1)\ z_1 = 3 \quad (2)\ z_2 = -2i \quad (3)\ z_3 = -2 + i \quad (4)\ z_4 = 2e^{\frac{4}{3}\pi i} \quad (5)\ z_5 = \overline{1 - 3i}$$




**2.** $z = \dfrac{1+2i}{3-4i}$ に対し, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$ を求めよ.

$$z = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-1+2i}{5}$$

となるので,

$$\underline{\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{5}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{2}{5}, \quad |z| = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

**3.** 方程式 $z^4 = 16i$ を解け.

$z = re^{i\theta}$ $(r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく. $z^4 = r^4 e^{4i\theta} = 16i$ において, 両辺の絶対値を取ると, $r^4 = 16$ より, $r = 2$ となる. このとき, $e^{4i\theta} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ であるから, $4\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n$ は整数) となる. ここで, $0 \leqq 4\theta < 8\pi$ であるから, $4\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{9\pi}{2}, \dfrac{13\pi}{2}$ となり, $\theta = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}$ を得る.

以上より,

$$\underline{z = 2e^{\frac{\pi}{8}i}, \quad 2e^{\frac{5}{8}\pi i}, \quad 2e^{\frac{9}{8}\pi i}, \quad 2e^{\frac{13}{8}\pi i}}$$

となる.

**おまけ.** 複素数 $\mathbb{C}$ には, 大小関係が定義できないこと ($i = 0, i > 0, i < 0$ のいずれでも矛盾すること) を示せ.

$i = 0$ とすると, 両辺を 2 乗して, $-1 = 0$ となり矛盾. $i > 0$ とすると, 両辺に $i$ を掛けても不等号の向きは変わらないので, $-1 = i^2 > 0$ となり矛盾. $i < 0$ とすると, 両辺に $i$ を掛ければ, 不等号の向きが逆になるので, $-1 = i^2 > 0$ となり矛盾. いずれにしても, 大小関係は定義できない. □

---

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

## 第 1 回 小テスト 講評[*1]

**1.** 各 1 点× 5

$z_1 = 3$ の図示として, 「直線 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 」を描いている人が 2, 3 名いました. $z_1 = 3 + 0i$ は $xy$ 平面上で $(3, 0)$ に対応する「点」であって, $x = 3$ という直線ではありません. もう一度, 複素数平面と $xy$ 平面の対応 (教科書 p.111) を確認しておいてください.

$z_1$, $z_2$, $z_3$ はほとんどの人ができていましたが, $z_4$ と $z_5$ の正答率はいまいちでした. $z_4$ を図示するには, オイラーの公式をわかっていなければなりません. 今後も, ずっと出てくるので, 早くこの表示になれてください.

$$2e^{\frac{4}{3}\pi i} = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

と求められれば正解ですが, $\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ などとしてしまっている人が結構いて残念でした. $z_5$ は共役複素数ということの定義がわかっているかどうかです. 実軸に関して対称な点になる, ということを思い出しておいてください.

**2.** 5 点

分母の有理化ならぬ「分母の実数化」に当たることをして, 複素数 $z$ を $a + bi$ の形にして, 実部, 虚部を求めてもらう問題です. $z$ の分母が $3 - 4i$ ですから, 共役複素数 $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$ を分子分母にかけてやれば良かったのでした.

与えられた分数表示のまま, $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{3}, \mathrm{Im}(z) = \frac{-2}{+4} = -\frac{1}{2}$ などとしている人が 2, 3 名いました. また, $\mathrm{Im}(z) = \frac{2}{5}i$ と 虚数単位 $i$ を含めて答えている人が, 結構いました. **$a + bi$ の虚部とは 実数 $b$ のこと**ですので, 気をつけましょう.

**3.** 5 点

まともに解けていたのが 12 名と出来が悪かったです. 解き方を再度授業で扱いますので, できていなかった人は, 確認しましょう. $z = re^{i\theta}$ とおいたときは, $r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi$ としておきましょう. $r^4 = 16$ から $r = -2$ まで出してしまうと, 余計な議論をしていることになります. 大きさ 2 とわかって, $e^{4i\theta} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ とわかっても, ここから, 「4 倍して $\frac{\pi}{2}$ だから $\frac{\pi}{8}$ だ!」と済ませてしまう人も多かったです. $e^z$ が周期 $2\pi i$ の周期関数であることから, $e^{\frac{5}{8}\pi i}$ なども, 4 乗すると, $e^{\frac{\pi}{2}i}$ に等しくなる, といったことが起こりますので, 解答のように, 一般角で議論するようにしてください.

## レポート課題

**課題**: 教科書 問 1(4), 問 4 すべて, 問 5(1), 問 7(1), (4), 問 8(1), 問 9(3), (4), 問 15(2), (4), 問 17(2), 問 18(2) (答だけでなく, 考え方や途中式も書くこと)

**提出**: A4 レポート用紙に上記課題を解いて, 学科・番号, 氏名を明記の上, 学生課まで. 締切は, 10 月 24 日 (木)17:00 とします.

[*1] 第 4 講 (2013 年 10 月 18 日) 配布.