応用数学Ⅰ 前期期末試験 解答例

問題 1. 曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t}), \quad (0 \leqq t \leqq 2)$ を考える.

(1) スカラー場 $\phi = xyz + 2$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \phi dy$ を求めよ.

解 C 上で,

$$\phi = e^t \cdot \sqrt{2}t \cdot e^{-t} + 2 = \sqrt{2}t + 2, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (e^t, \sqrt{2}, -e^{-t})$$

であるから,

$$\int_C \phi dy = \int_0^2 (\sqrt{2}t + 2) \cdot \sqrt{2} dt = \Big[t^2 + 2\sqrt{2}t \Big]_0^2 = \underline{4 + 4\sqrt{2}}.$$

(2) 曲線 C の長さ $s = \displaystyle\int_C ds = \int_C \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt$ を求めよ.

解 (1) の計算から,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(e^t)^2 + (\sqrt{2})^2 + (-e^{-t})^2} = \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t} (> 0)$$

となるので,

$$\int_C ds = \int_0^2 (e^t + e^{-t}) dt = \big[e^t - e^{-t} \big]_0^2 = \underline{e^2 - \frac{1}{e^2}}.$$

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (z, y, x)$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

解 C 上において,

$$\boldsymbol{a} = (e^{-t}, \sqrt{2}t, e^t)$$

であるから, (1) の計算より,

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^2 (e^{-t} \cdot e^t + \sqrt{2}t \cdot \sqrt{2} + e^t \cdot (-e^{-t})) dt \\
&= \int_0^2 2t dt \\
&= \big[t^2 \big]_0^2 \\
&= \underline{4}
\end{aligned}$$

問題 2. 閉曲線 C を xy 平面上の円周 $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とする.

(1) 曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C \{(x + 2y)dx + (3x - y)dy\}$ を求めよ.

解 円周 C で囲まれた領域を D とする. $F(x, y) = x + 2y, G(x, y) = 3x - y$ とおくと,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 3$$

であるから, グリーンの定理より,

$$\begin{aligned}
\int_C \{(x + 2y)dx + (3x - y)dy\} &= \iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_D dxdy \\
&= \underline{4\pi}.
\end{aligned}$$

(2) 曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C \{(x^2 - y^2)dx + (2xy + y^3)dy\}$ を求めよ.

解 $F(x,y)=x^2-y^2, G(x,y)=2xy+y^3$ とおくと,

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2y, \quad \frac{\partial G}{\partial x}=2y$$

であるから, グリーンの定理より,

$$\begin{aligned}\int_C\{(x^2-y^2)dx+(2xy+y^3)dy\}&=\iint_D\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)dxdy\\&=\iint_D 4ydxdy\end{aligned}$$

となる. ここで, 極座標変換 $(x,y)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考えると,

$$\begin{aligned}\iint_D 4ydxdy&=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\sin\theta\cdot rdrd\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sin\theta\int_0^2 4r^2dr\\&=[-\cos\theta]_0^{2\pi}\int_0^2 4r^2dr\\&=\underline{0}.\end{aligned}$$

問題 3. ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u,2\cos v,2\sin v)$ (定義域 $D: 0\leqq u\leqq 4, 0\leqq v\leqq 2\pi$) で表される円柱面 S を考える.

(1) 曲面 S の 単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}=(\pm)\dfrac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$ を求めよ. ただし, その向き ($\pm$ の符号) は, 円柱の外側を向くように定めよ.

解

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(1,0,0), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=(0,-2\sin v,2\cos v)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -2\sin v & 2\cos v\end{vmatrix}\\&=(0,-2\cos v,-2\sin v)\end{aligned}$$

となり,

$$|(0,-2\cos v,2\sin v)|=2$$

となるので, $\boldsymbol{n}=\pm(0,-\cos v,\sin v)$ のどちらか. ここで, 外側に向く条件を考えて,

$$\underline{\boldsymbol{n}=(0,\cos v,\sin v)}$$

となる.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(z+x,x+y,y+z)$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ.

解 S 上において, $\boldsymbol{a} = (2\sin v + u, u + 2\cos v, 2\cos v + 2\sin v)$ であるから,

$$\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (2\sin v + u, u + 2\cos v, 2\cos v + 2\sin v) \cdot (0, \cos v, \sin v) \cdot 2dudv \\
&= \int_0^4 \int_0^{2\pi} 2(2u\cos v + 2\cos^2 v + 2\sin v\cos v + 2\sin^2 v)dudv \\
&= 2\int_0^4 \int_0^{2\pi} (2u\cos v + \sin 2v + 2)dudv \\
&= 2\int_0^4 \left[2u\sin v - \frac{1}{2}\cos 2v + 2v\right]_0^{2\pi} du \\
&= 2\int_0^4 4\pi du \\
&= \underline{32\pi}.
\end{aligned}$$

問題 4. 半径 R の球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ を考え, S の上半分 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geqq 0$ を S_+ とし, S_+ の境界 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ を C とする. 曲線 C のパラメータ表示として, $\boldsymbol{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0), (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ をとり, 球面 S の単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ は S の外側を向くようにとるものとする.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x + y, y + z, z + x)$ に対し, $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ を求めよ.

解

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial(x + y)}{\partial x} + \frac{\partial(y + z)}{\partial y} + \frac{\partial(z + x)}{\partial z} = \underline{3}.$$

(2) (1) のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対し, 球面 S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ.

解 S で囲まれた球を V とおくと, ガウスの定理より,

$$\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{a} dV = 3\int_V dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \underline{4\pi R^3}.$$

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{b} = (x, x + y + z, z)$ に対して, 面積分 $\displaystyle\int_{S_+} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ.

解 ストークスの定理より,

$$\int_{S^+} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_C \boldsymbol{b} \cdot d\boldsymbol{r}$$

である. ここで, 曲線 C 上において,

$$\boldsymbol{b} = (R\cos t, R\cos t + R\sin t, 0), \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-R\sin t, R\cos t, 0)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{b} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} (R\cos t, R\cos t + R\sin t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)dt \\
&= \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)dt \\
&= R^2 \left[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} \\
&= \underline{\pi R^2}.
\end{aligned}$$

応用数学 I 前期期末試験 講評[*1]

皆様お疲れ様でした．それでは, 早速, 配点とコメントです．

問題 1. 30 点 (1) 10 点 (2) 10 点 (3) 10 点

(1) 線積分はパラメーター t の積分に直す, ということがわかっている人はほとんどできていました．$+2$ を忘れてしまう人, dy でなく, dz を計算している人が散見されました．

(2) $e^{2t}+2+e^{-2t}=(e^t+e^{-t})^2$ という因数分解ができるか, というところがひとつのポイントです．4 人に 1 人くらいが気づけていました．

(3) よくできていました．

問題 2. 18 点 (1) 10 点 (2) 8 点

(1) 次の (2) と合わせ, グリーンの定理を用いて解いてもらうことを意図した問題です．グリーンの定理を正しく覚えていないものが少なからずありました．また, 重積分に直すとき, なぜか $\int_0^2\int_0^2$ などとしているものが多かったです．次のページに示したように, グリーンの定理を用いずに, 直接, 線積分の定義から計算することも可能で, この解法で正解に至った方も多くいました．

(2) グリーンの定理を使った場合, (1) との違い, 積分する関数が, $4y$ と定数で無くなってしまうために, $\iint_D dxdy=$ (D の面積) という事実を利用できない点です．積分範囲が円なので, 極座標変換をする, という発想は自然ですが, これに気づけたのは 2 名, ともに, 計算ミス等で正解には至りませんでした．もうひとつ素直な解法としては, 別解に示したように, 曲線 C の方程式 $x^2+y^2=4$ から, $-\sqrt{4-x^2}$ から $\sqrt{4-x^2}$ までの積分を考えて逐次積分する解法をとろうとした方も数名いました．正しく答えにたどり着いたのは, 1 名でした．(1) 同様, 直接線積分の定義から計算することもでき, 数名の方が正解に至っていました．

問題 3. 25 点 (1) 15 点 (2) 10 点

(1) 簡単な偏微分と外積の計算, ベクトルの大きさなどの復習問題です．計算ミス (余因子展開の y 成分の符号ミスなど) を除けば, ほとんどの方が, $\pm(0,\cos v,\sin v)$ までは辿りつけていました．向きについては, 円柱面 S の形をきちんと把握し, 文章や絵で説明できている方は余りいませんでした．

(2) 講義でも注意したように, ガウスの定理が使えるのは, 「閉」曲面だけですから, (底と蓋のない) 円柱面 S には使えません．したがって, 面積分の定義に従って計算することになります．(1) での $\boldsymbol{n}$ の取り方から, 求める積分を外積を使って表そうとすれば,

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_D \boldsymbol{a}\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv$$

と, マイナスが出てくることに注意が必要です．

問題 4. 27 点 (1) 10 点 (2) 7 点 (3) 10 点

(1) は $(1,1,1)$ のように, div の定義をいまだに正しく覚えていない人が結構いました．(2) は閉曲面 S に対して, ガウスの定理を使います．小テストでも出しましたが, 球の体積公式を間違えている人がいました．(3) は最も正答率が低かった問題です．ストークスの定理について, 教科書を見なおしておきましょう．

[*1] 後期第 1 講 (2013 年 9 月 27 日) 配布. 復習の便宜のため, 8 月 23 日に先行アップロード

問題 2. 別解 $\boldsymbol{r} = (2\cos t, 2\sin t)$ より, $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (2\sin t, 2\cos t)$ であるから,
(1)

$$\begin{aligned}
&\int_C \{(x+2y)dx + (3x-y)dy\} \\
&= \int_0^{2\pi} \{(2\cos t + 4\sin t)\cdot(-2\sin t) + (6\cos t - 2\sin t)\cdot 2\cos t\}dt \\
&= \int_0^{2\pi} (10\cos 2t - 4\sin 2t + 2)dt \\
&= \underline{4}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\int_C \{(x^2-y^2)dx + (2xy+y^3)dy\} \\
&= \int_0^{2\pi} \{(4\cos^2 t - 4\sin^2 t)\cdot(-2\sin t) + (8\sin t\cos t + 8\sin^3 t)\cdot 2\cos t\}dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8\sin t\cos^2 t + 8\sin^3 t + 16\sin^3 t\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8\sin t\cos^2 t + 2(3\sin t - \sin 3t) + 16\sin^3 t\cos t)dt \\
&= \left[-\frac{8}{3}\cos^3 t - 6\cos t - \frac{2}{3}\cos 3t + 4\sin^4 t\right]_0^{2\pi} \\
&= \underline{0}.
\end{aligned}$$

(2)' グリーンの定理を使った後,

$$\begin{aligned}
\iint_D 4y\,dxdy &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4y\,dydx \\
&= \int_{-2}^{2} \left[2y^2\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \underline{0}.
\end{aligned}$$

問題 4. (2) 別解の方針 球面 S 上の点は

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u), \quad 0 \leqq u \leqq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$$

により表すことができる. ここから,

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = R\cos u, \quad \boldsymbol{n} = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$$

と求まる. これを用いて, ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の S 上の面積分を計算すれば良い. (3) についても同様にして考えることができる.