応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E)

第 4 回小テスト (第 13 講 (2013 年 7 月 19 日) 実施)

クラス・番号:　　　　　　　氏名:

以下の各問に答えよ. 試験時間 15 分.

注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.

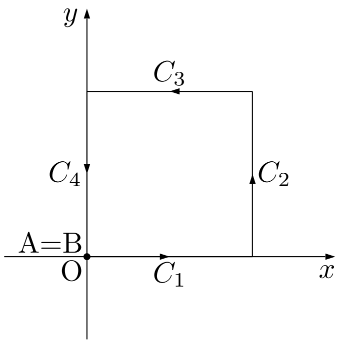
1. xy 平面内の曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 を

$$\begin{aligned} C_1 &: \boldsymbol{r}(t) = (t, 0) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ C_2 &: \boldsymbol{r}(t) = (1, t) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ C_3 &: \boldsymbol{r}(t) = (1-t, 1) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ C_4 &: \boldsymbol{r}(t) = (0, 1-t) \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

で定め, 区分的に滑らかな曲線 C を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ で定める. 次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C を図示せよ. 始点・終点および向きを明示すること.

解. 始点を A, 終点を B で表すと, C は下のような正方形の周である.



(2) 線積分 $\displaystyle\int_{C_2} \{(x^2 - y^2)dx + 2xydy\}$ を求めよ.

解. C_2 において,

$$x = 1, \quad , y = t, \quad d\boldsymbol{r} = (0, 1)dt$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \{(x^2 - y^2)dx + 2xydy\} &= \int_0^1 \{(1 - t^2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot t\}dt \\ &= \left[t^2\right]_0^1 \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

となる.

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

(3) 線積分 $\displaystyle\int_C \{(x^2-y^2)dx+2xydy\}$ を求めよ.

解. C で囲まれた領域を S とおく. $F(x,y)=x^2-y^2$, $G(x,y)=2xy$ とおけば,

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2y, \quad \frac{\partial G}{\partial x}=2y$$

であるから, グリーンの定理より,

$$\begin{aligned}\int_C \{(x^2-y^2)dx+2xydy\} &= \int_C \{Fdx+Gdy\} \\ &= \int_S \left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \int_0^1\int_0^1 4ydxdy \\ &= \underline{2}\end{aligned}$$

となる.

2. 原点を中心とする半径 $R(>0)$ の球 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ を V とし, その表面を S とする. S の単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ は S の外を向く向きにとるものとする. ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a}=(x+2013yz, 2y+7zx, 3z+19xy)$$

で定める.

(1) $\boldsymbol{a}$ の発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ を求めよ.

解.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(=\nabla\cdot\boldsymbol{a})=\frac{\partial(x+2013yz)}{\partial x}+\frac{\partial(2y+7zx)}{\partial y}+\frac{\partial(3z+19xy)}{\partial z}=\underline{6}$$

である.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ.

解. ガウスの定理より,

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS &= \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}dV \\ &= \int_V 6dV \\ &= 6\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \underline{8\pi R^3}\end{aligned}$$

と求まる.

第 4 回 小テスト 講評[*1]

1. (1) 3 点

簡単なパラメータ表示の曲線を図示できるか, 曲線の和の定義を理解しているかを問う問題です. 今回の出題の中では一番できていました. 例えば C_2 を取り上げると, $x = 1, y = t$ ですから, この時点で, C_2 が直線 $x = 1$ に含まれることがわかります. それでは, 直線のどこを動くのか, というのが, 変域 $0 \leqq t \leqq 1$ によって与えられているわけで, $y = t$ でしたから,「直線 $x = 1$ のうち, $0 \leqq y \leqq 1$ の部分」という答えが得られます.

(2) 3 点

一番初め, 第 8 講で学習した, 線積分です. 与えられた C_2 の式に基づいて, x, y, dx, dy をそれぞれ, t, dt で表してあげて, **パラメーター t の積分にして考えるのが基本**です. $\int x^2 dx$ とあるので, そのまま $x^3/3$ と積分したくなる気持ちはわかりますが, そのとき y は x によらない定数かというと, 一般にはそんなことはありませんので, $\int y^2 dx$ を $y^2 x$ と処理してしまうのは (一般には) 正しくありません. y が x の関数として $y = f(x)$ のようにかけている場合には, y に $f(x)$ を代入して, 計算してやれば, 正しい答えが求まります. しかし, いつでも y が x の関数として, わかりやすい形に書けるとは限りません. (例えば, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\log(t^2+1), e^t \sin t)$ について, y を x の式で表すことができるかを考えてみましょう.) この場合には, 結局, 定義通りに パラメーター t の表示に直して計算することになります. 以上の説明の意味が理解できた上で, x や y の式のまま処理することは, 構いませんが, ちゃんとそういう理解の上で計算していることは答案に書くべきです. 以上の説明がよくわからなければ, 定義通り t に戻す, というやり方を忠実に守ってください. 以上の話は, 曲線に限らず, 曲面の面積分についても言えることです.

話がそれましたが, C_2 によって囲まれる領域とは何か, という質問に答えられないことからわかるように, **この曲線 C_2 は閉曲線ではないので, グリーンの定理は使えません.** 予想通り, グリーンの定理を使おうとする人がたくさんいました. どの状況で, どの定理が使えるのか, 正しく区別できるかどうかは今回の学習範囲の一つのポイントです.「それらしい線積分があったら, グリーンの定理」のような理解はしないでください.

線積分の定義通りに進めていた人で多かったのは, $dx = dt$ として進めていたものです. $x = 1$ を t で微分したら, $dx/dt = 0$ なので, 形式的に, $dx = 0dt$ となり, この積分の前半は 0 になります.

(3) 3 点

問題番号が (2) となっていて, 紛らわしい問題でした. ご迷惑をお掛けしました. (2) との違いは, 積分路 C が単一閉曲線になっていることです. 言い換えれば, グリーンの定理を使うことができます. 解答例はそれに従ったものです.

解答の書き方としては,「グリーンの定理より」「C で囲まれた範囲を S とすると」などと断りを入れて, 書くべきですが, ほぼ全員が, いきなり, $\displaystyle\int_S \ldots$ のように書き始めていたのが気になり

[*1] 第 14 講 (2013 年 7 月 24 日) 配布. 復習の便宜のため, 7 月 20 日に web で先行配布.

ました.

定義通りに, 4 つの線積分に分けても求めることができます. 詳細は省きますが, 順に, $1/3, 1, 2/3, 0$ となって, もちろん同じ答え 2 が得られます.

2. (1) 3 点

中間範囲の復習になります. $(1,2,3)$ や $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ を求めているのが多かった誤答でした.

(2) 3 点

ガウスの定理を使おう, という意図は見える答案が多かったです. が, 正答にたどり着けていたのは 10 名弱でした.

正しく, $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}dV$ と書かれていた答案には 1 点与えています. 多かった誤答は, $\displaystyle\int_0^R\int_0^R\int_0^R dxdydz$ としているもの. これでは, 1 辺 R の立方体の体積です. 半径 R の球の体積を正しく知らない人もちらほら見られました.

第 3 回小テスト (追試) について

(1) 答: $-8/3$

C_2 の式を $x = 2t$ に変えたにもかかわらず, $dx = dt$, $\phi = t^2 - 2$ としている答案が非常に多い. 問題をよく読んでください. 積分計算のケアレスミスも目立ちました.

(2) 答: $(-\sin t, \cos t, 0)$

本試と同じ問題です.

(3) C_1 の線積分: 0, C_2 の線積分: 0, 答: 0

どちらも $\boldsymbol{a}$ の z 成分は $\cos 0 = 1$ ですが, 0 にしている人が目立ちました. また, $\cos^4 t$ に $t = \pi$ を代入して, -1 にしている人, 奇関数 t^3 に対して, $\int_{-1}^1 t^3 dt = 2\int_0^1 t^3 dt$ などとしている人が多かったです. 最後の偶関数・奇関数は, 少し計算が楽になる, という程度にすぎませんから, 100% 間違いなく使いこなせる, というのでなければ, 使うのをやめましょう. また, $\cos^{k-1} t \sin t$ の形の積分, 何度か, 原始関数の求め方を説明しましたが, よくわからないという人は, $u = \cos t$ という置換積分がもっとも無難な解き方です.

期末レポートについて

以下の問題及び要領に従って, レポートを提出してください. 全員提出とします. 出席点等 25 点の範囲で, 適宜成績に加味します.

問題: 教科書 p.34 問 1, p.37 問 4(2), p.48 問 11, p.51(練習問題 3) 2. および 3.

締切: 8 月 2 日 (金) まで (これ以降の提出は一切認めません.)

提出場所: 学生係窓口

形式: A4 レポート用紙片面, 左上をホチキスで止めること. 表紙などは特に必要としないが, 学科・出席番号・氏名を明記すること. また, 答えでだけでなく, 途中の過程も記すこと.

注意事項: 相談等をするのは良いが, あからさまに, 転記しただけと認められる場合は, 成績への加味を著しく減らすことがある. 答だけを並べたようなレポートも同様の扱いとする.