応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E)
第 3 回 小テスト (第 10 講 (2013 年 6 月 28 日) 実施)

クラス・番号: 　　　　　　　氏名:

以下の各問に答えよ. 試験時間 15 分.

注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.

1. 空間内の曲線 C_1, C_2 を

$$C_1 : \boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0) \quad (\pi \leq t \leq 2\pi)$$
$$C_2 : \boldsymbol{r}(t) = (t, 0, 0) \quad (-2 \leq t \leq 2)$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) 空間内のスカラー場 $\phi = x^2 + 1$ に対して, ϕ の C_2 に沿った線積分 $\int_{C_2} \phi dx$ を求めよ.

C_2 上において,

$$dx = 1 \cdot dt, \quad \phi = x^2 + 1 = t^2 + 1$$

であるから,

$$\int_{C_1} \phi dx = \int_{-2}^{2} (t^2 + 1) dt = \underline{\frac{28}{3}}$$

(2) 曲線 C_1 の単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を求めよ.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-2\sin t, 2\cos t, 0), \quad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = 2$$

より,

$$\boldsymbol{t} = \underline{(-\sin t, \cos t, 0)}.$$

(3) 空間内のベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x^2, y^3, \sin z)$ に対して, $\boldsymbol{a}$ の $C_1 - C_2$ に沿った線積分 $\int_{C_1 - C_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

C_1 について,

$$d\boldsymbol{r} = (-2\sin t, 2\cos t, 0)dt, \quad \boldsymbol{a} = (4\cos^2 t, 8\sin^3 t, 0)$$

より,

$$\int_{C_1} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\pi}^{2\pi} \left\{4\cos^2 t(-2\sin t) + 8\sin^3 t(2\cos t) + 0\right\} dt = \frac{16}{3}.$$

C_2 について

$$d\boldsymbol{r} = (1, 0, 0)dt, \quad \boldsymbol{a} = (t^2, 0, 0)$$

より,

$$\int_{C_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-2}^{2} t^2 dt = \frac{16}{3}.$$

よって,

$$\int_{C_1 - C_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = \underline{0}.$$

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

第 3 回 小テスト 講評[*1]

(1) 5 点

変数 x のままで, 計算している人が何人かいました. スカラー場 ϕ は x の関数で, 積分も dx と x に関する積分ではありますが, 「積分区間」に当たる C_2 は 範囲が t で指定されていますから, **すべて t に直して計算する**ようにしてください. (この問題はたまたま, C_2 上で $x = t$ なので, 曲線 C_2 は線分になり, x の範囲としても $-2 \leq x \leq 2$ となるので, 普通に積分しても結果的に正しい答えが出ますが, 授業中, あるいは教科書にあるように, t に直して計算する, というのが線積分の定義です. かならず, 曲線のパラメータ t に統一して考えるようにしてください.)

(2) 3 点

中間範囲の復習です. $\boldsymbol{t} = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$ で求まります. 「単位」接線ベクトルという名前が示しているように, 単位ベクトルでした. $\boldsymbol{r}'(t)$ を答えにしていたひとは, 言葉の意味を考えてください.

また, $\dfrac{1}{2}(-\sin t, 2\cos t, 0)$ としている人が目立ちました. 減点はしていませんが, 約分できるときは約分してください.

(3) 10 点

一つ目のポイントは, $\int_{C_1 - C_2}$ を $\int_{C_1} - \int_{C_2}$ と積分の差に分解できるかという点です. 多くの人ができていました.

あとは, それぞれの積分の計算ですが, $\boldsymbol{a} = (x^2, y^3, \sin z)$ のまま残して, あたかも定数のようにして計算している人が何人かいました. C_1 上の点 (x, y, z) は

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t, z(t) = 0$$

で定まるような座標ですから, $\int_{C_1}$ の積分では, x, y, z にこれらのパラメータ表示を代入して計算しなければなりません.

$\sin^k x \cos x$ の積分は, 授業中にも考え方を示したように, $(\sin x)^{k+1}$ を微分すると, 指数 $k+1$ が k になり, 合成関数の微分より, $\sin x$ の微分 $\cos x$ がひとつ出てくる, ということを考えればできます. 非常によく出てくる形ですので, 考え方を覚えておいてください.

また, 以前からずっと言っていますが, $\boldsymbol{a}$, $d\boldsymbol{r}$ のように, ベクトルであることをはっきり書きましょう. ベクトルなのか, スカラーなのか, をきちんと認識して計算できるかどうかがとても大切です.

[*1] 第 12 講 (2013 年 7 月 12 日) 配布. 返却が遅れ, すみませんでした.