応用数学 I 前期中間試験 試験解答例

問題 1.

(1)

$$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(0,2,4)+(1,-1,1)-(-3,2,-1)=\underline{(4,-1,6)}$$

(2)

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$$

であるから, 求めるベクトルは,

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,-1)}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) &= ((0,1,2)+(2,-2,2))\cdot((0,3,6)-(-3,2,-1))\\ &=(2,-1,4)\cdot(3,1,7)\\ &=2\cdot 3+(-1)\cdot 1+4\cdot 7\\ &=\underline{33}\end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,2,1)$ であるから,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -1 & 2 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{vmatrix}\\ &=(2\cdot(-1)-1\cdot 2)\boldsymbol{e}_x-((-1)\cdot(-1)-1\cdot(-3))\boldsymbol{e}_y+((-1\cdot 2-2\cdot(-3)))\boldsymbol{e}_z\\ &=\underline{(-4,-4,4)}\end{aligned}$$

問題 2.

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(2,2t,t^2)$ であるから,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| &= \sqrt{2^2+(2t)^2+(t^2)^2}\\ &=\sqrt{(t^2+2)^2}\\ &=|t^2+2|\\ &=t^2+2(\because t^2\geq 0)\end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\boldsymbol{t}=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|}=\underline{\frac{1}{t^2+2}(2,2t,t^2)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}}{dt} &= \left(\frac{-2\cdot 2t}{(t^2+2)^2},\frac{2(t^2+2)-2t\cdot 2t}{(t^2+2)^2},\frac{2t(t^2+2)-t^2\cdot 2t}{(t^2+2)^2}\right)\\ &=\frac{1}{(t^2+2)^2}(-4t,-2t^2+4,4t)\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$
\begin{aligned}
|(-4t, -2t^2+4, 4t)| &= \sqrt{(-4t)^2+(-2t^2+4)^2+(4t)^2} \\
&= \sqrt{4t^4+16t^2+16} \\
&= 2(t^2+2)
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\right|} = \underline{\frac{1}{t^2+2}(-2t, -t^2+2, 2t)}
$$

問題 3.

(1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (0, \cos v, \sin v)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (2, -u\sin v, u\cos v)$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 2 & -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} \\
&= \underline{(u, 2\sin v, -2\cos v)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right) \\
&= \sqrt{x^2+A} + x\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+A}} + A\cdot\frac{1+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}} \\
&= \frac{(x^2+A)+x^2}{\sqrt{x^2+A}} + A\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}} \\
&= \frac{2(x^2+A)}{\sqrt{x^2+A}} \\
&= 2\sqrt{x^2+A}
\end{aligned}
$$

となり, 両辺を 2 で割ることにより, 示すべき式を得る. □

(3) (1) より,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{u^2+(2\sin v)^2+(-2\cos v)^2} \\
&= \sqrt{u^2+4}
\end{aligned}
$$

であるから, (2) の公式を用いて,

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{u^2+4} du \right) dv \\
&= \frac{\pi}{2} \left[u\sqrt{u^2+4} + 4\log\left| u + \sqrt{u^2+4} \right| \right]_0^1 \\
&= \underline{\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{5} + 4\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}
\end{aligned}
$$

問題 4. (1)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\varphi &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \\
&= \underline{(2xyz + y^2z + yz^2, x^2z + 2xyz + xz^2, x^2y + xy^2 + 2xyz)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial(x^2e^y)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^2)}{\partial z} = \underline{2xe^y + 2 + 2xz}
$$

(3)

$$
\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2e^y & 2y & xz^2 \end{vmatrix} = \underline{(0, -z^2, -x^2e^y)}
$$

(4)

$$
\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \underline{2(xy + yz + zx)}
$$

問題 5.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) &= \operatorname{rot}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} \right)\boldsymbol{e}_x - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \right)\boldsymbol{e}_z \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

より, 題意の式は成り立つ. (偏微分の順序が交換できることに何回でも微分できることを用いた)□

応用数学 I 前期中間試験 講評[*1]

問題 1. 30 点 (1) 6 点 (2) 6 点 (3) 8 点 (4) 10 点

(4) の外積の計算でやや計算ミスが見られましたが, 基本的に良く出来ていました.

問題 2. 20 点 (1) 12 点 (2) 8 点

(1) 非常に良く出来ていました. (1) に関しては, $\sqrt{t^4+4t^2+4}=t^2+2$ に気づかず, ルートのまま残していても加点しています. ただし, $\sqrt{t^4+4t^2+2}=t+2$ などおかしな式が書いてある場合には, 適宜減点しています.

(2) 一番多かったミスは, $\boldsymbol{t}$ の前についている $\dfrac{1}{t^2+2}$ を無視して, 後ろの $(2,2t,t^2)$ の部分だけ微分しているものでした. $\dfrac{1}{t^2+2}$ も t の関数ですから, これも含めて, 微分を計算する必要があります.

問題 3. 20 点 (1) 8 点 (2) 4 点 (3) 8 点

(1) これもほとんどの人ができていました.

(2) 直接 (3) を出すと, ちょっと難しい (知らないと出来ないような) 積分になるので, そのための誘導問題です. 一番出来が悪かったと思います. 後半の式変形はともかく, 各項の微分はできるようにしておきましょう.

(3) 外積の大きさを求めるところまでで半分ですが, ここまでは概ねできていました. (2) を使うことを問題文でかなり強調していましたが, 誘導に乗れない人が少なからずいたのと, 求める重積分は定積分ですが, 答えに u や v が残ったまま, 積分区間をわかっていない答案もちらほら見られました.

問題 4. 20 点 (1)〜(4) 各 5 点

考えているスカラー場, ベクトル場はそんなに微分するのが難しいものではないですから, 単純に, 記号の意味を覚えているか, という問題で, 結果, 出来不出来がはっきり分かれました. $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ や $\Delta\varphi$ の結果をベクトル場にしている人が多かったです.

問題 5. 10 点

授業中に, 具体的な関数を例にとって示した式を, 一般の φ に対して証明する問題です. 上の 4 問よりはやや抽象度が高い問題ですが, 定義にしたがって, 計算をしていけばそう難しくはないはずです. 自分で具体的に選んできたスカラー場に対して, 計算をしている, という答案については, その計算過程が正しいもののみ 2 点与えています.

平均点などの成績情報は講義でお知らせします.

[*1] 第 8 講 (2013 年 6 月 14 日) 配布.