応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E)

第 2 回 小テスト (第 6 講 (2013 年 5 月 24 日) 実施)

クラス・番号: 氏名:

以下の各問に答えよ. 試験時間 15 分.

注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.

1. 自然対数 e を底とする指数関数 $y = e^{ax}$(a は定数) について, 微分 $y' = ae^{ax}$ であったことを思い出そう. $\boldsymbol{r}(t) = \left(t, \sqrt{2}e^t, \dfrac{1}{2}e^{2t}\right)$ で表される曲線 C について, 以下の問いに答えよ.

(1) 接線ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を求めよ.

解.

各成分ごとに t で微分し, $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1, \sqrt{2}e^t, e^{2t})$ となる.

(2) 曲線 C 上の $t = 0$ における点 P(0) から, $t = 1$ おける点 P(1) までの, 曲線の長さ s を求めよ.

解.

$s = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$ であった. ここで,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| &= \sqrt{1^2 + 2e^{2t} + e^{4t}} \\ &= \sqrt{(1 + e^{2t})^2} \\ &= 1 + e^{2t}(> 0)\end{aligned}$$

となるので, 求める長さは,

$$s = \int_0^1 (1 + e^{2t})dt = \left[t + \frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$$

となる.

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

2. ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)=(2u,3v,uv)$ で表される曲面 S を考える．S の (u,v) に対応する点 P における単位法線ベクトルを求めたい．

(3) 曲面 S 上の u-曲線の接線ベクトルである $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と, v-曲線の接線ベクトルである $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ をそれぞれ求めよ．

解.

成分ごとに偏導関数を計算して,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(2,0,v), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=(0,3,u)$$

と求まる．

(4) (3) の結果を用いて, 曲面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\pm\dfrac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$ を求めよ．

解.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 2 & 0 & v\\ 0 & 3 & u\end{vmatrix}\\ &=(0\cdot u-v\cdot 3)\boldsymbol{e}_x-(2\cdot u-v\cdot 0)\boldsymbol{e}_y+(2\cdot 3-0\cdot 0)\boldsymbol{e}_z\\ &=(-3v,-2u,6)\end{aligned}$$

であるから,

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{4u^2+9v^2+36}$$

となる．よって,

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{4u^2+9v^2+36}}(-3v,-2u,6)$$

と求まる．

3. スカラー場 $\varphi=x^2+y^2+z^2$ と点 $\mathrm{P}(1,2,1)$ に対し, $\boldsymbol{e}=(0,1,0)$ 方向への方向微分係数 $(\operatorname{grad}\varphi)_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{e}$ を求めよ．

解.

$$\operatorname{grad}\varphi=(2x,2y,2z)$$

であるから, P における φ の勾配 $(\operatorname{grad}\varphi)_{\mathrm{P}}$ は

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{\mathrm{P}}=(2,4,2)$$

となる．したがって, φ の P における $\boldsymbol{e}$ 方向の方向微分係数は

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{e}=(2,4,2)\cdot(0,1,0)=4$$

と求まる．

第 2 回 小テスト 講評[*1]

1.

(1) **出題意図: 指数関数の微分ができる.**

といっても, 問題に, 微分公式を書いてあるので, ほとんどすべての人が正解していました.

(2) **出題意図: 曲線の長さの公式を覚えているか.**

多かったミスは, $|\boldsymbol{r}(t)|$ を積分しようとしているものでした. 公式の導出は教科書, ノートを見なおしてもらうとして, 少し感覚的な説明をしておきます. t が時間変数である場合を考えれば, 小学校で習ったように,

$$(\text{道のり}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$$

です. 我々は, 速さが時間とともに変化している場合を考えているので, 単なる掛け算でなく, 積分をすることになります. この感覚を持っていれば, 速度 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ を時間で積分したものが, 道のりになることは, ごく自然に理解されるはずです.

なお, 実際の計算においては, 因数分解 $1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2$ に気づいてルートをなくす, というのがひとつのポイントになっていましたが, できていたのは, 4 割程度でした. ルートを外すときに, $-(e^{2t} + 1)$ でなく, $e^{2t} + 1$ になることをきちんと断れていたのは 2 名でした.

2.

(3) **出題意図: 偏微分ができる.**

これもほぼすべての人ができていました.

(4) **出題意図: 外積の計算ができる. 単位ベクトルの求め方がわかる.**

半数の人ができていました. y 成分の符号が逆のひとなども, 今回は得点を与えてません. また, いまだに,

$$(a, b, c) \times (d, e, f) = (ad, be, cf)$$

としていたり, 内積を答えたりしている人がいました. 授業中に扱った余因子展開でなくとも, 成分を直接覚えたり, サラスの公式などで求めても良いですが, とにかく, ミスなく計算できるようにしておいてください.

3. 出題意図: 勾配 grad の定義がわかる. 計算ができる. 方向微分係数がわかる.

手が付けられていた人は概ねできていました. 先週講義で $\mathrm{div}, \mathrm{rot}$ も出て来ましたが, 講義中に何度も強調しているように, 「何を入れて, 何が出てくるのか」をはっきりさせておきましょう. grad は 温度, 標高などのスカラー場を入れると, その変化の様子が最も大きい方向を指し示すベクトル場を出力する操作でした.

全体を通して

配点ですが, 1 問 3 点× 5=15 点満点です. 部分点を与えていることがあります. 平均点などは次回講義でお伝えします.

[*1] 第 7 講 (2013 年 5 月 31 日) 配布, 復習の便宜のため, 5 月 27 日に Web にて先行公開.