応用数学 I (ベクトル解析, 2013 年度前期, 4M/4E)
第 1 回 小テスト (第 3 講 (2013 年 4 月 26 日) 実施)

クラス: 4X00　　　氏名: 高専 一郎

以下の各問に答えよ. 試験時間 10 分.
注意 1. 答えだけでなく途中式も残してください. 2. 周りとの相談, ノート参照など不可.

1. $\boldsymbol{a} = (0,1,2)$, $\boldsymbol{b} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{c} = (1,2,-1)$ とする.

(1) $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$ を求めよ.

$$(0,1,2) - 3(1,1,1) + 2(1,2,-1) = \underline{(-1,2,-3)}.$$

(2) $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が直交するとき, 実数 k の値を求めよ.

内積 $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ が成り立つから,

$$(k, 1+k, 2+k) \cdot (1,2,-1) = 0 \Leftrightarrow k + 2(1+k) - 1(2+k) = 0$$

より, $\underline{k=0}$ となる.

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\boldsymbol{e}_x - (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\boldsymbol{e}_y + (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)\boldsymbol{e}_z = \underline{(-1,2,-1)}.$$

2. ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \cos t, \tan t)$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ の表す曲線を C とし, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の表す C 上の点を $\mathrm{P}(t)$ で表す.

(4) 曲線 C の点 $\mathrm{P}(t)$ における接線ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ を求めよ.

$$\boldsymbol{r}'(t) = \underline{\left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{\cos^2 t}\right)}. \quad (z \text{ 成分については } \sec^2 t \text{ でも良い.})$$

(5) 点 $\mathrm{P}(0)$ における単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}(0)$ を求めよ.

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{\cos^4 t}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 t}}$$

であるから,

$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 t}}\right)^{-1} \left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{\cos^2 t}\right).$$

これに, $t=0$ を代入して, $\boldsymbol{t}(0) = \underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

問題作成: 植松 哲也 (utetsuya@08.alumni.u-tokyo.ac.jp)

第 1 回 小テスト 講評[*1]

1.

(1) **出題意図: ベクトルのスカラー倍 (定数倍) と足し算引き算ができる.**

ほとんどすべての人が正解していました.

(2) **出題意図: ベクトルの直交条件が「内積=0」で表せることを知っている. 内積の計算ができる.**

1 回目の授業で, 扱った内容です. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し, そのなす角を θ とすると, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ なので, 特に, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ $(\theta = 90^\circ)$ のとき, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ となるのでした.

内積の計算式は

$$(a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1}$$

です. 知らなければできないので, 必ず覚えてください.

$$(a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = (a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z) \tag{2}$$

などとしている人が意外に多かったですが, **内積の計算結果は数**です. また内積を, $\boldsymbol{ac}$ や $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ と書いている人がいましたが, 必ず間に $\cdot$ をいれて表しましょう. 何名か

$$k = -\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad ????? \tag{3}$$

のように, ベクトルの分数や約分のようなことをしてしまっていた人がいました. $\vec{a}$ と書く, 内積の $\cdot$ を忘れない, といったことをきちんとするところから始めましょう.

(3) **出題意図: 外積の計算ができる.**

これも, 計算式 (成分表示そのものか, 「余因子展開」を利用するもの) をちゃんと覚えていないと出来ません. どちらについても, やはり, y 成分の符号が逆の人が多かったです. また, 余因子展開を使った解き方で多かったのは,

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e_x(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - e_y(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + e_z(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \tag{4}$$

$$= (-1) - (-2) + (-1) = 0 \tag{5}$$

としている人でした. e_x などを数字 1 だと思っているようですが, 1 行目の成分は正しくは基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x = (1,0,0), \boldsymbol{e}_y = (0,1,0), \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$ を並べたものですから, 式 (5) のような足し算はできません. 内積を求めている人も含め, **外積の計算結果はベクトル**だということを押さえた上で, 計算式をきちんと覚えましょう.

[*1] 第 4 講 (2013 年 5 月 10 日) 配布, 復習の便宜のため, 4 月 28 日に Web にて先行公開.

2.

(4) **出題意図: ベクトル関数の微分を知っている．三角関数の微分が計算できる．**

各成分ごとに微分をすれば良いのでした．$\tan t$ の微分を覚えているだろうか？ということが知りたくて出題しましたが, 概ねできていました．$\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ として, 商の微分公式を使って求める, ということがきちんとできている人もいました.

(5) **出題意図: 単位接線ベクトルの定義がわかる.**

上の解答例では, 一般の t に対する, $\boldsymbol{t}(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$ の式を求めていますが, 実際には, $\boldsymbol{t}(0)$ だけ求めれば良いので, $\boldsymbol{r}'(0)$ についてだけ考えれば十分です.

幾つか見られた誤りは, $\boldsymbol{r}'(t)$ の大きさではなく, $\boldsymbol{r}(t)$ の大きさで割っている, というものでした. $\boldsymbol{t}$ は, 接線ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ と同じ向きで, 大きさが 1 のベクトルです．今回, $\boldsymbol{r}'(0) = (1, 0, 1)$ となるので, これを同じ向きのまま, 長さ 1 にしてあげる必要があります．ということは, $|\boldsymbol{r}'(0)| = \sqrt{2}$ で割って, 長さを縮めてあげれば良いことになります．ここで, $|\boldsymbol{r}(0)|$ の長さは, 全く関係ないですね. 公式を闇雲に覚えるのでなく, 「単位ベクトル」ということの意味を考えれば, 「$\boldsymbol{r}$ だったかな？ $\boldsymbol{r}'$ だったかな？」と悩むことはなくなり, 覚える量を少なくすることができるはずです.

全体を通して

配点ですが, 1 問 2 点× 5=10 点満点です．(1) 以外では, 部分点を与えていることがあります. 平均点などは次回講義でお伝えします.

全員が, ベクトルを a のように, 普通の文字として書いていました．上に挙げた (3) 式, (4) 式などでは, あえて, 皆さんの答案をそのまま引用して, ベクトルを普通の文字で書きましたが, こういう書き方をしていると, スカラーなのかベクトルなのか, はっきりしなくなって, 結果, おかしな計算の原因にもなります．$\vec{a}$ のように矢印をいれて, あるいは, $\boldsymbol{a}$ のように太文字 (手書きだと, 縦線を入れる書き方をよくします) にするようにしてください.