第 8 回の補足

植松 哲也 *

2017 年 5 月 29 日

1 合成関数の微分法の証明について

素朴な証明の方針は,

$$\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}=\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{f(a+h)-f(a)}\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と変形して, $h\to 0$ のとき, $f(a+h)-f(a)\to 0$ だから, 1 つ目の項が $g'(f(a))$ に, 2 つ目の項が $f'(a)$ に収束する, というものであるが, $h\neq 0$ であっても, $f(a+h)-f(a)=0$ となることがありうるので, 1 つ目の項の極限というものを考えることができない.

そこで, 分数の形を明示的に出さずに, 微分可能性を議論することが望ましく, 前回紹介したもう一つの微分可能性の定義

$$f(c+h)=f(c)+\alpha h+o(h)\ \text{となる}\ \alpha\ \text{が存在すること}$$

を利用して, 証明を行う. なお, 証明の都合で, $o(h)=ho(1)$ [*1] と書き換えておく.

証明. 前回注意した微分可能性の言い換えを用いる. 任意に $c\in I$ をとり, $a=f(c)$ とおく. このとき, f は c で微分可能だから,

$$f(c+h)=f(c)+\alpha h+ho(1)$$

となる実数 α が存在し, 具体的には, $\alpha=f'(c)$ である. また, g は a で微分可能であるから,

$$g(a+k)=g(a)+\beta k+ko(1)$$

となる実数 β が存在し, 具体的には, $\beta=g'(a)=g'(f(c))$ である. このとき, $c+h\in I$ となるような h に対して, $k=f(c+h)-f(c)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
g(f(c+h)) &= g(a+k)\\
&= g(a)+\beta k+ko(1)\\
&= g(f(c))+\beta(\alpha h+ho(1))+ko(1)\\
&= g(f(c))+\beta\alpha h+\beta ho(1)+(\alpha h+ho(1))o(1)\\
&= g(f(c))+\alpha\beta h+h(\beta o(1)+(\alpha+o(1))o(1))\\
&= g(f(c))+\alpha\beta h+ho(1)
\end{aligned}$$

となるので, $(g\circ f)$ は $x=c$ で微分可能であり,

$$(g\circ f)'(c)=\beta\alpha=g'(f(c))f'(c).$$

□

---

* 11 号館 313 号室, メールアドレス: uematsu@meijo-u.ac.jp

*1 $f(h)=o(h)$ とすれば, $f(h)/h=o(1)$ であるから, $f(h)=h\cdot f(h)/h=ho(1)$ となる