第 6 回の補足

植松 哲也 *

2017 年 5 月 22 日

1 e^α の定義と性質について

前回, e の実数乗の定義をしたが, いくつか不備があったので, 再掲する. 講義と同様, 実数の有理数乗はすでに定義されているものとする.

1. 有理数の稠密性：$\forall\alpha\in\mathbb{R}\,\forall n\in\mathbb{N}\,\exists q\in\mathbb{Q}(|\alpha-q|<1/n)$ から, x に収束する有理数列 $\{a_n\}$ が存在する.
   このとき, $N_-=\{\,n\in\mathbb{N}\mid a_n\le\alpha\,\}$ と $N_+\{\,n\in\mathbb{N}\mid a_n>\alpha\,\}$ のどちらかは無限集合である. 例えば, N_- が無限集合とすると, $n\in N_-$ だけを添字に持つような部分列を考え, さらに, 単調増加になるように部分列を取り出すことで, α に収束する単調増加な有理数列 $\{a_n\}$ が得られる. この数列の上界を M とおくと, 数列 $\{e^{a_n}\}$ は上界 e^M をもつから上に有界で, また, $e>1$ より単調増加であるから, 収束する.
   N_+ が無限集合の場合にも同様にして, α に収束する単調減少な有理数列 $\{a_n\}$ が得られ, $\{e^{a_n}\}$ は下に有界な単調減少数列となるので, 収束する. この極限を A とおく.
2. 次の補題が成り立つ：

   補題 1.1. $\{b_n\}$ を α に収束する任意の有理数列[*1] とする. このとき, $\{e^{b_n}\}$ は A に収束する.

   この補題の証明には ϵ-N 論法が必要となる. 大事なことは, 証明において, 指数法則を使うが, 実数に対しての指数法則はまだ証明していないので, $b_n\in\mathbb{Q}$ でないと議論ができない, ということにある.
   この補題により, α に収束する有理数列 $\{a_n\}$ のとり方によらずに, 極限が定まることがわかる. そこで, この極限値 A を e^α と定義する.
3. こうして得られた $\mathbb{R}$ 上の指数関数 $f(x)=e^x$ について次が成り立つ：

   定理 1.2. (1) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ に対して, $e^{x+y}=e^xe^y$.
   (2) f は $\mathbb{R}$ 上連続[*2].
   (3) f は狭義単調増加.
   (4) $\operatorname{Im}f=\{\,y\in\mathbb{R}\mid y>0\,\}$.

   証明. (1) $\{x_n\},\{y_n\}$ を x,y に収束する有理数列とすれば, $\{x_n+y_n\}$ は $x+y$ に収束する有理

* 11 号館 313 号室, メールアドレス: uematsu@meijo-u.ac.jp

[*1] 講義における 1 つ目の不備はここにある. 講義では, ここを単に任意の数列としており, 無理数からなる列も含んでいた.

[*2] 講義における 2 つ目の不備はここにある. 講義では連続性は明らか, としたが, 連続性の証明には, 実数に対する指数法則が必要になる.

数列. したがって,

$$
\begin{aligned}
e^{x+y} &= \lim_{n\to\infty} e^{x_n+y_n} \quad (\because \text{実数乗の定義, 補題}) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{x_n}e^{y_n} \quad (\because \text{有理数に対する指数法則}) \\
&= e^x e^y \quad (\because \text{実数乗の定義, 補題,「収束する数列の積の極限は極限の積」})
\end{aligned}
$$

(2) 任意に $\alpha \in \mathbb{R}$ をとる. 補題 1.1 の証明は, α に収束するような任意の実数列 $\{b_n\}$ に対しても, (1) で示した実数に対する指数法則を用いれば, 全く同様に成り立つものである. これは, f が $\mathbb{R}$ 上で連続ということに他ならない.

(3) 略.

(4) [*3] $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ だから,

$$\forall y > 0 \exists n, m \in \mathbb{Z}(e^m < y < e^n)$$

であることに注意する.

任意に $y > 0$ を取る. 集合 $A = \{\, a \in \mathbb{Q} \mid e^a < y \,\}$ を取ると, これは先に注意したことから, 空でなく, また上に有界であるから, 上限 $x \in \mathbb{R}$ が存在する. このとき, $e^x = y$ となることが示せる. 実際, $x - a_n < 1/n$ なる A の数列 $\{a_n\}$ を考えると, $e^{a_n} < y$ であるから, $e^x = \lim_{n\to\infty} e^{a_n} \leq y$ であるが, $e^x < y$ とすると, $y/e^x > 1$ であるから, $e^{1/n} \to 1$ $(n \to \infty)$ より, 十分大きい n に対して, $y/e^x > e^{1/n} > 1$ となる. したがって,

$$e^{a_n + \frac{1}{n}} < e^{x+\frac{1}{n}} < y$$

より, $a_n + \dfrac{1}{n} \in A$ となるが, 一方, a_n の構成から, $x < a_n + \dfrac{1}{n}$ であるから, x より大きい A の元が存在することになり矛盾.

$\square$

[*3] この証明も不備はないが, 講義ではやや言葉足らずだったので, 修正の上, 再掲しておく.