

第 2 回の補足

植松 哲也 *

2017 年 4 月 24 日

1 \forall, \exists を含む命題の証明について

講義では、式の読み方、意味を中心に説明したが、実際にその真偽を考える上では、証明の仕方、書き方を考えることも重要なので、それらについて述べる。

まず、「正しくないことを示すには 1 つ反例を挙げればよい」という認識がいつでも正しいわけではないことを下の 2 つの例で理解してほしい。

(0-1) $\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 100)$ が偽であることを示せ。

命題が偽であることは、その否定が真であることであるから、 $\exists n \in \mathbb{N}(n < 100)$ を示せばよい。このような n を元の命題の反例 というのであった。次のように示せばよい：

Proof. 否定命題 $\exists n \in \mathbb{N}(n < 100)$ が成り立つことを示す。例えば、 $n = 90$ とすれば、 $90 \in \mathbb{N}$ であり、 $90 < 100$ である。よって、 $\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 100)$ が偽であることが示された。□

(0-2) $\exists n \in \mathbb{N}(n^2 = 5)$ が偽であることを示せ。

これも、否定命題が真であることを示せばよいのだが、否定命題は、 $\forall n \in \mathbb{N}(n^2 \neq 5)$ であるから、これは、何か反例を挙げればよい、という性質の命題ではないことがわかる。 $n^2 = 5$ となる自然数 n が存在しない、言い換えれば、すべての自然数 n に対して、 $n^2 \neq 5$ であることを論理でもって示さねばならない。

ところで、この問題の否定命題は、「すべての自然数 n に対し」という命題であるから、基本的には、任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる、という書き出しでなければならない。例えば、つぎのような証明が考えられる：

Proof. 否定命題 $\forall n \in \mathbb{N}(n^2 \neq 5)$ が成り立つことを示す。任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる。 $n = 1$ であれば、 $n^2 = 1 \neq 5$ である。 $n = 2$ であれば、 $n^2 = 4 \neq 5$ である。 $n \geq 3$ であれば、 $n^2 \geq 3^2 = 9 > 5$ だから、 $n^2 \neq 5$ である。したがって、すべての自然数 n に対し、 $n^2 \neq 5$ だから、元の命題 $\exists n \in \mathbb{N}(n^2 = 5)$ は偽であることが示された。□

以上、量子子 (\forall や \exists のこと) がひとつだけ含まれた命題についてみた。以下、2 つ以上含むような問題を考えてみる。

(1) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}(n + m = 0)$ を示せ。

こちらにも、任意に n をひとつ取る、という書き出しでなければならない。その上で、この n に応じて、カッコ内を満足するように、自然数 m が取ってこれることを示せばよい。どう m をとるか、というところが証明の核心である。例えば、次のような証明が書ける：

Proof. 任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる。このとき、 m を $m = -n$ ととれば、これは自然数であり、 $n + m = n + (-n) = 0$ を満たす。よって示された。□

* 11 号館 313 号室, メールアドレス: uematsu@meijo-u.ac.jp

(2) $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ が偽であることを示せ. *1

命題が偽であることを示す, ということは, 否定命題が真であることを示せばよい. そこで, 次のような証明が書ける:

Proof. 与えられた命題の否定, すなわち

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} (n + m \neq 0)$$

が成り立つことを示せばよい. 任意に $m \in \mathbb{N}$ をとる. このとき, n を $n = -m + 1$ と取れば, $n \in \mathbb{N}$ であり, $n + m = (-m + 1) + m = 1 \neq 0$ を満たす. よって, $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ が偽であることが示された. \square

あるいは, $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ が偽, ということは, 「 $\forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ 」という性質をもつ自然数 m が存在しなければよいのだと考えて, 次のように背理法で示してもよい

Proof. 与えられた命題が真であるとして, 矛盾を導く. $\forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ となる (n によらない) m が存在したとする. ところが, このような m に対し, n を $n = -m + 1$ と取ってくれば, $n \in \mathbb{N}$ であるが, $n + m = (-m + 1) + m = 1 \neq 0$ となる. これは, m が $\forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ という性質を持っていたことに矛盾. したがって, $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n + m = 0)$ は偽である. \square

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x = y^2)$ が偽であることを示せ.

これも否定命題を考える. そうすると, $\exists x \in \mathbb{R} \dots$ が真, つまり, こういう x (反例) がひとつでもあることを示せばよいということになる. 全称命題が偽であることを示すには, 反例を挙げればよいのである. 例えば, 次のような証明が書ける:

Proof. 与えられた命題の否定

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x \neq y^2)$$

が真であることを示す. x として, $x = -1$ をとると, どのように $y \in \mathbb{R}$ をとっても, $y^2 \geq 0 > -1$ であるから, $-1 \neq y^2$ である. よって, $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x = y^2)$ が示された. \square

2 最大値・上限・上界について

講義の最後に提示した例で, 「 $I = (-\infty, 2)$ には最大値がない」と述べたが, 定義に従って, 論理的に証明してみる. 高校までのように, 「1.9, 1.99, 1.999, ... と限りなく 2 に近づけるが, 2 は含まれていないので」といった論証からは徐々に卒業していくことが望ましい.

Proof. 背理法で示す. $I = (-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ に最大値 m が存在したと仮定する. このとき, $m \in I$ であるから, $m < 2$ である. そこで, $\epsilon^{*2} = 2 - m$ とおくと, $\epsilon > 0$ である. ここで, 実数 m' を $m' = m + \epsilon/2$ とおくと,

$$2 - m' = 2 - (m + \epsilon/2) = \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2 > 0$$

より, $m' < 2$ だから, $m' \in I$ である. 一方で,

$$m' - m = (m + \epsilon/2) - m = \epsilon/2 > 0$$

だから, $m < m'$ である. したがって, m より真に大きい I の元が存在するが, これは, m が最大値であることに矛盾. したがって, I には最大値は存在しない. \square

*1 前回, こういった命題の意味や偽であることを日本語で説明しようとしたが, うまく伝えられなかったようである. 逆説的にいえば, \forall, \exists の順番などを誤解の生じないように正確に伝えるには, 論理記号が欠かせない.

*2 イプシロン. 小さい数を表すときによく用いられるギリシャ文字である.