論理と集合についてのノート

植松 哲也 *

2017 年 4 月 7 日

1 はじめに

論理や集合について, その基本的な用語, 記号, 概念などをまとめておきます. なお, 本稿作成においては,『松坂和夫著, 「集合と位相」, 岩波書店 (1968)』, 教科書『工科系の微分積分学の基礎』を参考にしました.

2 論理

正しい (**真**) か正しくない (**偽**) かのどちらか一方が成り立っている主張を**命題**といいます.

例 1 (1)「すべての長方形は正方形である.」(正しくない)
(2)「2 は偶数である.」(正しい)
(3)「2 は小さな数である.」(「小さい」という言葉にはっきりした意味がないので, 命題ではない.) □

以下, 命題が正しいことを「○」, 正しくないことを「×」で表すことにします. 命題 A が与えられたとき, 命題 $\neg A$ (A でない, A の否定) を次で定めます.

A	$\neg A$
○	×
×	○

つまり, $\neg A$ が正しい, というのは, A が正しくないときにいう, ということです.

さらに, 命題 B も与えられたとき, 3 つの命題 $A \wedge B$ (A かつ B), $A \vee B$ (A または B), $A \Rightarrow B$(A ならば B) を次で定めます.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
○	○			
○	×			
×	○			
×	×			

「A かつ B」が正しいのは, A も正しくて, B も正しいときに限る, というのはよいでしょう. 「A または B」といったときは, A も B も正しいときも成り立つことに注意しましょう.[*1]. さらに注意が必要なのは, 「A ならば B」です. A が正しくないときは, B の真偽に関わらず, 「A ならば B」は正しいものとします. [*2] $A \Rightarrow B$ と

* uematsu@meijo-u.ac.jp, 11 号館 313 号室.

[*1] 日常生活においては, 例えば, レストランで「パン または ライス を選んでください」と聞かれて, 「両方で」と言ったら怪訝な顔をされるように, 暗に「どちらか」という意味を含んでいることが多いようです.

[*2] 日常生活においては, 例えば, 「宿題が終わったならば, 外で遊んでもいい」(許可, may の文章) と言われて, 宿題が終わっていないのに外に遊びにいったら叱られるように, 「ならば」は違う意味で使われることも多いようです. 一方,「信号が赤ならば, 歩行者は止まれ」(強制, must の文章) に違反する (×) のはどういうときか, と考えてみると, 「信号が赤で歩行者が歩く」ときだけです. 赤でない

$B \Rightarrow A$ が共に正しいとき,「A **は** B **であるための必要十分条件**」「A **と** B **は同値**」といい, $A \Leftrightarrow B$ と書きます.

3　集合

3.1　集合とは

「もの」の集まりのことを**集合** といいます.

例 1 (1)「整数全体の集まり」
(2)「偶数全体の集まり」
(3)「5 以上 6 未満の実数全体の集まり」
(4)「鶴舞線の駅全体の集まり」
(5)「$x + y = 1$ をみたすような実数の組 (x, y) の集まり」□

「もの」の範囲が明確に決まっていること が重要で, 例えば, 「とっても大きい数全体の集まり」,「素敵なもの全体の集まり」などは集合とは言いません. 「とっても大きい」「素敵な」というだけでは, 人によって, 基準が違うだろうし, はっきりしないからです.

集合は普通, 大文字のアルファベットを用いて表すことが多いです. 集合のなかにはいっている個々の「もの」のことを**元** (または **要素**) と言います. 元は, 小文字のアルファベットを用いて表すことが多いです. 「もの」a が集合 A の元であることを,

$$a \boxed{\quad\ } A \quad (\text{または } A \boxed{\quad\ } a)$$

と表し, 「a **は** A **に含まれる**」「A **は** a **を含む**」などといいます. 逆に, 「もの」b が集合 A の元でないことは

$$b \boxed{\quad\ } A$$

のように表します. 例えば, 集合 B を「偶数全体の集まり」とすれば,

$$B \boxed{\quad\ } 0, \quad 100 \boxed{\quad\ } B, \quad -3 \boxed{\quad\ } B$$

などとなります. よく登場する集合には, 固有名詞的に, 記号が与えられているものもあります.

例 2(1) $\boxed{\quad\ }$:「自然数全体の集まり (0 は含めないことにする)」
(2) $\boxed{\quad\ }$:「整数全体の集まり」
(3) $\boxed{\quad\ }$:「有理数全体の集まり」
(4) $\boxed{\quad\ }$:「実数全体の集まり」
(5) $\boxed{\quad\ }$:「複素数全体の集まり」 □

3.2　集合の記法

どんな集合か (その集合にはどんな元が含まれているのか) を書き表すには, 次の 2 通りの方法があります.

- **外延的記法** 集合に含まれる元を中括弧 { } の中に全て書き並べることによって, 集合を表す. 例えば,
  - $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - 「偶数全体の集まり」:　$\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$ [*3]

  のようになります.

ときは, 止まろうが歩こうが OK(○) ですから, 数学の「ならば」はこの意味での「ならば」に当たります.

[*3] 元が無限にあるときは, 何が続くのかがわかるようにした上で, 「...」 を用いることは許容されます.

- **内包的記法** その集合の元が満たしている条件を表示することで, 集合を表す. $\{x \mid (x$ のみたす条件$)\}$ という形に書く. 例えば,
  - 「5 以上 6 未満の実数全体の集まり」: $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $5 \leq$ [*4] $x < 6\}$ [*5]
  - $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}\right.$ かつ $\left. b \in \mathbb{N} \right\}$
  - 「$x + y = 1$ をみたすような実数の組 (x, y) の集まり」: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ [*6] $\mid x + y = 1\}$

  のようになります.

3.3 集合の相等, 部分集合

2 つの集合があると, 場合によっては, 「含む」「含まれる」の関係にあることがあります. 2 つの集合 A と B について,

$$\text{すべての } x \text{ に対して,「} x \in A \text{ ならば } x \in B \text{」} \tag{1}$$

が成り立つとき,

$$A \boxed{\quad} B \quad (\text{または } B \boxed{\quad} A)$$

と書き, 「A は B の**部分集合**である」「**A は B に含まれる**」「**B は A を含む**」などといいます. [*7]

また, そうでないとき, すなわち,

$$\text{ある } x \text{ が存在して,「} x \in A \text{ かつ } x \notin B \text{」} \tag{2}$$

が成り立つとき,

$$A \boxed{\quad} B \quad (\text{または } B \boxed{\quad} A)$$

と書きます.

例 3

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

という 2 つの集合 A, B を考えると, $A \subset B$ です. また, A には (次節で紹介する空集合も含め) 全部で 8 つの部分集合があります (全て書き出してみましょう). □

とくに, $A \subset B$ であり, かつ, $B \subset A$ であるとき, 言い換えれば, A の中身と B の中身がまったく同じであるとき,

$$A \boxed{\quad\ } B$$

とかき,「**A と B は等しい**」といいます.

$A \subset B$ かつ $B \subset C$ であれば, $A \subset C$ が成り立ちます. 証明してみましょう.

3.3.1 全称量化子と存在量化子

部分集合を定義するときに出てきた条件 (1) や (2) は, それぞれ次のように書くことがあります.

$$\boxed{\quad\ }(x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{3}$$

$$\boxed{\quad\ }(x \in A \wedge x \notin B) \tag{4}$$

[*4] 不等号は $\leqq, \geqq$ の代わりに, $\leq, \geq$ を使うことがある.
[*5] あるいは $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 6\}$, 単に $\{x \mid 5 \leq x < 6\}$ と書くこともある.
[*6] $\mathbb{R}^2$ は「座標平面の点の集合」=「実数 2 つの組の集合」を表す記号です.
[*7] したがって, とくに, $A \subset A$ です.

記号 $\forall$ は 「すべて (任意) の…に対して〜」という意味をもち, 全称量化子といいます. 記号 $\exists$ は「ある…が存在して〜」という意味をもち, 存在量化子といいます.[*8] 無理に使う必要はないですが, 教科書などで登場しても, 意味が理解できるようにしておきましょう. なお, 正式な記法ではないですが, 実際上は,

$$「\forall x \in A \text{ に対して}, x \in B」$$

$$「\exists x \in A \text{ に対して}, x \notin B」「\exists x \in A \text{ が存在して}, x \notin B」「\exists x \in A \text{ s.t. } x \notin B」$$[*9]

のように「すべての」「ある」の省略記号のように使われることも少なくありません.

3.4 空集合

ひとつも元を持たない集合 $\{\ \}$ を**空集合** といい, $\boxed{}$ で表します. また, どんな集合 A も, 空集合を部分集合として含む, つまり, $\boxed{}$ と約束します.

3.5 いろいろな集合

2 つの集合 A と B に対して, 新たに,

$$A \boxed{} B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\},$$
$$A \boxed{} B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$
$$A \boxed{} B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

という集合を考えることができます. $A \cup B$ を「A と B の**和集合**」, $A \cap B$ を「A と B の**共通部分**」, $A \setminus B$ を「A と B の**差集合**」といいます. 定義から明らかに, はじめの 2 つは, A と B を入れ替えても同じ集合ですが, 差集合 $A \setminus B$ と $B \setminus A$ は一般には異なることに注意してください.

また, なんらかの集合 U (全体集合) が一つ固定されていて, その部分集合のみを考えている状況では, 部分集合 $A \subset U$ に対して, 「A の補集合」

$$A^c = U \setminus A$$

を考えることができます.

例 4 全体集合 $U = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ とし, その部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{2, 4, 5, 9\}$$

を考える. このとき,

$$A \cup B = \boxed{},$$
$$A \cap B = \boxed{},$$
$$A \setminus B = \boxed{},$$
$$B \setminus A = \boxed{},$$
$$A^c = \boxed{}. \square$$

共通部分について $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ が, 同様に, 和集合について $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ が成り立ちます. この他, 教科書の p.4〜5, 例 1.1 を各自解いておきましょう. 演習書も参考にしてください.

[*8] $\forall$ は all, any, arbitrary の頭文字 A を反転したもの, $\exists$ は exist(s) の頭文字 E を反転したもの, といわれています.
[*9] s.t. は "such that" の省略記号です. 英語で "There exists $x \in A$ such that $x \notin B$." と表現されることから来ています.