# 第 7 講の補足

植松 哲也 *

2016 年 11 月 8 日

- $f(x) = \sin x$ を部分積分を利用して, $x = 0$ で 3 次の項まで展開すると次のようになる:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin 0 + (\sin x - \sin 0) \\
&= \sin 0 + \int_0^x \cos t dt \\
&= \sin 0 + \int_0^x \cos t\{-(x-t)\}' dt \\
&= \sin 0 + [\cos t\{-(x-t)\}]_0^x - \int_0^x (-\sin t)\{-(x-t)\} dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \int_0^x (-\sin t)(x-t) dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \int_0^x (-\sin t)\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\}' dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \left[-\sin t\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)\right]_0^x - \int_0^x (-\cos t)\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\} dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \int_0^x (-\cos t)\cdot\frac{1}{2}(x-t)^2 dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \int_0^x (-\cos t)\cdot\left\{-\frac{1}{6}(x-t)^3\right\}' dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \left[-\cos t\left(-\frac{1}{6}(x-t)^3\right)\right] - \int_0^x -\cos t\cdot\left\{-\frac{1}{6}(x-t)^3\right\} dt \\
&= \sin 0 + (\cos 0)x + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \frac{-\cos 0}{6}x^3 + \int_0^x (-\cos t)\cdot\frac{1}{6}(x-t)^3 dt \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 + \int_0^x (-\cos t)\cdot\frac{1}{6}(x-t)^3 dt
\end{aligned}
$$

- $f(x) = e^x \cos x$ の $x = 0$ における 3 次までの展開を求めるときに,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

のように, それぞれを 3 次まで展開しておいて, 形式的にその積をとって,

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

とすれば, 簡単に計算できる, ということを述べたが, $e^x$ や $\cos x$ の展開で省略した「$\cdots$」という部分が, 求めたい $e^x \cos x$ の 3 次までの項に影響を及ぼすかもしれない, ということを気にする人がいるかもしれない. 実際には影響を及ぼすことがないことが知られており, ここではそのことについて, 触れておく. なお, 以下は「解析入門 I」(杉浦光夫著, 東京大学出版会) の §II.4 を参考にした.

* HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp

**定義** $x=0$ のまわりで定義された関数 $r(x)$ に対して,

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}$$

が成り立つとき,「0 において, $r(x)$ は $x^n$ **に比べて無視できる**」といい, $r(x)\ll x^n$ で表す. 0 において $x^n$ に比べて無視できる関数を一般に, $o(x^n)$ と表す. 記号 $o(x^n)$ を**ランダウの記号**と呼ぶ.
例えば, $3x^3=o(x^2)$ のような書き方をする. 実際, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^3}{x^2}=0$ である. 「無視できる」という言葉の通り, これは, $3x^3$ が $x=0$ の近くでは, $x^2$ に比べてうんと小さいということを表している.
$f(x)$ を $n$ 回微分可能な関数とすると, Taylor の定理で, 剰余項を微分形で表したもの (教科書 1.11 参照) から,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

となる $c$ が 0 と $x$ の間に存在する. 剰余項は $n$ 次式だから, $x^{n-1}$ に比べて無視できる, すなわち, ランダウの記号を用いれば,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)}+o(x^{n-1})$$

と書くことができる. これにより, 上で「$\cdots$」と書いていた部分は, 次のように数学的に正しい式として表すことができる:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\quad \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)^{*1*2}.$$

すると,

$$\begin{aligned}
e^x\cos x&=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\\
&=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{12}x^5+\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)o(x^3)+\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)o(x^3)+o(x^3)o(x^3)\\
&=1+x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)+o(x^3)+\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)o(x^3)+\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)o(x^3)+o(x^3)o(x^3)\\
&=1+x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)+o(x^3)+o(x^3)+o(x^3)+o(x^6)\\
&=1+x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

となって, $e^x\cos x$ の 3 次までの展開が得られることがわかる[*3]. ここで最後の 2 行の式変形は, 次の定理を用いた:

**定理**

(1) $m\le n$ のとき, $o(x^m)+o(x^n)=o(x^m)$.
(2) $o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})$.
(3) $x=0$ のまわりで有界な関数 $f(x)$ に対して, $f(x)o(x^n)=o(x^n)$.
証明は, 例えば (1) であれば, $\dfrac{p(x)}{x^m}\to 0$, $\dfrac{q(x)}{x^n}\to 0$ $(x\to 0)$ となるような関数 $p(x), q(x)$ をとってきたときに, $\dfrac{p(x)+q(x)}{x^m}=\dfrac{p(x)}{x^m}+\dfrac{q(x)}{x^n}\cdot x^{n-m}$ が $x\to 0$ で 0 に収束するかどうか, ということを考えればよい.

---

*1 本来は $o(x^2)$ であるが, $\cos x$ の展開は $x^3$ の係数が 0 なので, $o(x^3)$ でも正しい式である.
*2 $e^x$, $\cos x$ のどちらも記号としては同じ $o(x^3)$ ではあるが, もちろんそれぞれの関数は実体としては異なるものであることに注意.
*3 厳密には,「べき $x^k$ による関数の $n$ 次までの漸近展開が一意的である」という事実により, 普通に積のまま Taylor の定理から展開したものと, このように展開してから積をとったものとが等しくなる, ということを述べる必要がある.