第 5 講の補足

植松 哲也 *

2016 年 10 月 25 日

- 第 5 講において, 次の問題を演習で扱った：

$$S = \int_0^1 \tan^{-1} x dx$$

講義においては, 図形的な考察から,

$$S = 1 \times \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

と考えて解説したが, $\log x$ の積分と同様にして, 部分積分で

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x dx &= \int x' \tan^{-1} x dx \\ &= x \tan^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

のように不定積分を計算できるので, これを利用して解答することもできる.
類題として,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x dx$$

を挙げておこう.
(1) 図形的な考察を用いて
(2) 不定積分 $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$ (証明は上と同様にできる) を用いて
の 2 つの方法で解いてみることを勧める. 答は $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ となる.

* HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp