

論理と集合についてのノート

植松 哲也 *

2016年4月5日

1 はじめに

論理や集合について、その基本的な用語、記号、概念などをまとめておきます。なお、本稿作成においては、『松坂和夫著、「集合と位相」、岩波書店(1968)』、教科書『工科系の微分積分学の基礎』を参考にしました。

2 論理

正しい(真)が正しくない(偽)かのどちらか一方が成り立っている主張を命題といいます。

例 1 (1) 「すべての長方形は正方形である。」(正しくない)

(2) 「2は偶数である。」(正しい)

(3) 「2は小さな数である。」(「小さい」という言葉にはっきりした意味がないので、命題ではない。) □

以下、命題が正しいことを「 \square 」、正しくないことを「 \times 」で表すことにします。命題 A が与えられたとき、命題 $\neg A$ (A でない、 A の否定) を次で定めます。

A	$\neg A$
	\times
\times	

つまり、 $\neg A$ が正しい、というのは、 A が正しくないときにいう、ということです。

さらに、命題 B も与えられたとき、3つの命題 $A \wedge B$ (A かつ B)、 $A \vee B$ (A または B)、 $A \Rightarrow B$ (A ならば B) を次で定めます。

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
	\times			
\times				
\times	\times			

「 A かつ B 」が正しいのは、 A も正しくて、 B も正しいときに限る、というのはよいでしょう。「 A または B 」といったときは、 A も B も正しいときも成り立つことに注意しましょう。^{*1} さらに注意が必要なのは、「 A ならば B 」です。 A が正しくないときは、 B の真偽に関わらず、「 A ならば B 」は正しいものとします。^{*2} $A \Rightarrow B$ と

* <http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html>

^{*1} 日常生活においては、例えば、レストランで「パン または ライス を選んでください」と聞かれて、「両方で」と言ったら怪訝な顔をされるように、暗に「どちらか」という意味を含んでいることが多いようです。

^{*2} 日常生活においては、例えば、「宿題が終わったならば、外で遊んでもいい」(許可, may の文章)と言われて、宿題が終わっていないのに外に遊びにいったら叱られるように、「ならば」は違う意味で使われることも多いようです。一方、「信号が赤ならば、歩行者は止まれ」(強制, must の文章)に違反する(\times)のはどういうときか、と考えてみると、「信号が赤で歩行者が歩く」ときだけです。赤でない

$B \Rightarrow A$ が共に正しいとき、「 A は B であるための必要十分条件」「 A と B は同値」といい、 $A \Leftrightarrow B$ と書きます。

3 集合

3.1 集合とは

「もの」の集まりのことを集合 といいます。

- 例 1 (1) 「整数全体の集まり」
(2) 「偶数全体の集まり」
(3) 「5 以上 6 未満の実数全体の集まり」
(4) 「鶴舞線の駅全体の集まり」
(5) 「 $x + y = 1$ をみたすような実数の組 (x, y) の集まり」□

「もの」の範囲が明確に決まっていることが重要で、例えば、「とっても大きい数全体の集まり」、「素敵なもの全体の集まり」などは集合とは言いません。「とっても大きい」「素敵な」というだけでは、人によって、基準が違おうだろうし、はっきりしないからです。

集合は普通、大文字のアルファベットを用いて表すことが多いです。集合のなかにはいつている個々の「もの」のことを元 (または 要素) と言います。元は、小文字のアルファベットを用いて表すことが多いです。「もの」 a が集合 A の元であることを、

$$a \square A \quad (\text{または } A \square a)$$

と表し、「 a は A に含まれる」「 A は a を含む」などと言います。逆に、「もの」 b が集合 A の元でないことは

$$b \square A$$

のように表します。例えば、集合 B を「偶数全体の集まり」とすれば、

$$B \square 0, \quad 100 \square B, \quad -3 \square B$$

などとなります。よく登場する集合には、固有名詞的に、記号が与えられているものもあります。

- 例 2(1) \square : 「自然数全体の集まり (0 は含めないことにする)」
(2) \square : 「整数全体の集まり」
(3) \square : 「有理数全体の集まり」
(4) \square : 「実数全体の集まり」
(5) \square : 「複素数全体の集まり」□

3.2 集合の記法

どんな集合か (その集合にはどんな元が含まれているのか) を書き表すには、次の 2 通りの方法があります。

- 外延的記法 集合に含まれる元を中括弧 $\{ \}$ の中に全て書き並べることによって、集合を表す。例えば、
 - $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 - 「偶数全体の集まり」: $\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\}$ *3のようになります。

ときは、止まろうが歩こうが OK() ですから、数学の「ならば」はこの意味での「ならば」に当たります。

*3 元が無限にあるときは、何が続くのかわかるようにした上で、「 \dots 」を用いることは許容されます。

- 内包的記法 その集合の元が満たしている条件を表示することで、集合を表す。 $\{x \mid (x \text{ のみたす条件})\}$ という形に書く。例えば、
 - 「5 以上 6 未満の実数全体の集まり」: $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 5 \leq x < 6\}$ *5
 - $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ かつ } b \in \mathbb{N} \right\}$
 - 「 $x + y = 1$ をみたすような実数の組 (x, y) の集まり」: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *6
 のようになります。

3.3 集合の相等, 部分集合

2つの集合があると、場合によっては、「含む」「含まれる」の関係にあることがあります。2つの集合 A と B について、

$$\text{すべての } x \text{ に対して, 「} x \in A \text{ ならば } x \in B \text{」} \quad (1)$$

が成り立つとき、

$$A \subseteq B \quad (\text{または } B \supseteq A)$$

と書き、「 A は B の部分集合である」「 A は B に含まれる」「 B は A を含む」などといいます。*7

また、そうでないとき、すなわち、

$$\text{ある } x \text{ が存在して, 「} x \in A \text{ かつ } x \notin B \text{」} \quad (2)$$

が成り立つとき、

$$A \not\subseteq B \quad (\text{または } B \not\supseteq A)$$

と書きます。

例 3

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

という2つの集合 A, B を考えると、 $A \subset B$ です。また、 A には (次節で紹介する空集合も含め) 全部で8つの部分集合があります (全て書き出してみましょう)。□

とくに、 $A \subset B$ であり、かつ、 $B \subset A$ であるとき、言い換えれば、 A の中身と B の中身がまったく同じであるとき、

$$A \equiv B$$

とかき、「 A と B は等しい」といいます。

$A \subset B$ かつ $B \subset C$ であれば、 $A \subset C$ が成り立ちます。証明してみましょう。

3.3.1 全称量子化と存在量子化

部分集合を定義するときに出てきた条件 (1) や (2) は、それぞれ次のように書くことができます。

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad (3)$$

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B) \quad (4)$$

*4 不等号は \leq, \geq の代わりに、 \leq, \geq を使うことがある。

*5 あるいは $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 6\}$, 単に $\{x \mid 5 \leq x < 6\}$ と書くこともある。

*6 \mathbb{R}^2 は「座標平面の点の集合」=「実数2つの組の集合」を表す記号です。

*7 したがって、とくに、 $A \subset A$ です。

記号 \forall は「すべて (任意) の...に対して ~」という意味をもち、全称量子子といいます。記号 \exists は「ある...が存在して ~」という意味をもち、存在量子子といいます。^{*8} 無理に使う必要はないですが、教科書などで登場しても、意味が理解できるようにしておきましょう。なお、正式な記法ではないですが、実際上は、

$$\text{「}\forall x \in A \text{ に対して, } x \in B\text{」}$$

$$\text{「}\exists x \in A \text{ に対して, } x \notin B\text{」, 「}\exists x \in A \text{ が存在して, } x \notin B\text{」, 「}\exists x \in A \text{ s.t. } x \notin B\text{」}^{\ast 9}$$

のように「すべての」「ある」の省略記号のように使われることも少なくありません。

3.4 空集合

ひとつも元を持たない集合 $\{\}$ を空集合といい、 \square で表します。また、どんな集合 A も、空集合を部分集合として含む、つまり、 $\square \subset A$ と約束します。

3.5 いろいろな集合

2つの集合 A と B に対して、新たに、

$$A \sqcup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

という集合を考えることができます。 $A \cup B$ を「 A と B の和集合」、 $A \cap B$ を「 A と B の共通部分」、 $A \setminus B$ を「 A と B の差集合」といいます。定義から明らかに、はじめの2つは、 A と B を入れ替えても同じ集合ですが、差集合 $A \setminus B$ と $B \setminus A$ は一般には異なることに注意してください。

また、なんらかの集合 U (全体集合) が一つ固定されていて、その部分集合のみを考えている状況では、部分集合 $A \subset U$ に対して、「 A の補集合」

$$A^c = U \setminus A$$

を考えることができます。

例 4 全体集合 $U = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ とし、その部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{2, 4, 5, 9\}$$

を考える。このとき、

$$A \cup B = \square,$$

$$A \cap B = \square,$$

$$A \setminus B = \square,$$

$$B \setminus A = \square,$$

$$A^c = \square. \square$$

共通部分について $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ が、同様に、和集合について $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ が成り立ちます。その他、教科書の p.4~5, 例 1.1 を各自解いておきましょう。演習書も参考にしてください。

^{*8} \forall は all, any, arbitrary の頭文字 A を反転したもの、 \exists は exist(s) の頭文字 E を反転したもの、といわれています。

^{*9} s.t. は "such that" の省略記号です。英語で "There exists $x \in A$ such that $x \notin B$." と表現されることから来ています。