問題 1.9[A] 4 の解答例 *

植松 哲也 †

2016 年 5 月 10 日

4 (1) **解答.**

$$f(x) = x - \log(1+x) \ (x > -1)$$

とおく.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

であるから, $f'(x) = 0$ となるのは, $x = 0$ のときである. したがって, 区間 $x > -1$ において, 以下のような増減表がかける.

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	0	$\nearrow$

これより, $f(x)$ は $x > -1$ において, $x = 0$ で最小値 0 をとるので, $x > -1$ において, $f(x) \geqq 0$, すなわち,

$$x > -1 \text{ において } x \geqq \log(1+x)$$

が成り立つ. □

4 (2) **解答.**

$$f(x) = \log(x+1) - (x - x^2) \ (x > -1)$$

とおく.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - (1 - 2x) = \frac{x(2x+1)}{x+1}$$

であるから, $x \geqq -\dfrac{1}{2}$ において, $f'(x) = 0$ となるのは, $x = -\dfrac{1}{2}, 0$ のときである. したがって, 区間 $x \geqq -\dfrac{1}{2}$ において, 以下のような増減表がかける.

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

これより, $f(x)$ は $x \geqq -\dfrac{1}{2}$ において, $x = 0$ で最小値 0 をとるので, $x \geqq -\dfrac{1}{2}$ において, $f(x) \geqq 0$, すなわち,

$$x \geqq -\frac{1}{2} \text{ において } \log(1+x) \geqq x - x^2$$

が成り立つ. □

* 問題は指定教科書「北岡, 深川, 河村著, 『工科系の微分積分学の基礎』」p.50 を参照.

† HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp

4 (3) **解答.**

$$f(x) = 1 + x(e-1) - e^x$$

とおく.

$$f'(x) = e - 1 - e^x$$

である. $f'(x) = 0$ となるのは,

$$e^x = e - 1 \quad \therefore x = \log(e-1)$$

のときであり, e^x は単調増加関数で, $e^0 = 1 < e-1 < e = e^1$ なので, $0 < \log(e-1) < 1$ である. したがって, 区間 $[0,1]$ において, 以下のような増減表がかける.

x	0	$\cdots$	$\log(e-1)$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\log(e-1))$	$\searrow$	0

したがって, $f(x)$ は $[0,1]$ において, $x = 0, 1$ で最小値 0 をとるので, $[0,1]$ において, $f(x) \geqq 0$, すなわち,

$$0 \leqq x \leqq 1 \text{ において } 1 + x(e-1) \geqq e^x$$

が成り立つ. □