問題 1.6[A] 4(2), 5 の解答例 *

植松 哲也 †

2016 年 5 月 10 日

4 (2) **解答.** $f(x) = x^p$ とおく. 平均値の定理 (定理 1.14) により, ある $c \in (1, x)$ が存在して,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c)$$

が成り立つ. ここで, $f'(x) = px^{p-1}$ であり*1, $p > 1$ なので,

$$f'(c) = pc^{p-1} > pc^0 = p$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} > p$$

であり, $x - 1 > 0$ なので, 分母を払って, $x^p - 1 > p(x - 1)$ を得る. □

5 **解答.** 任意に $x > 0$ をとる. 平均値の定理 (定理 1.14) より, $c \in (0, x)$ であって,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

となるものが存在する. 仮定より, $f(0) = 0, |f'(c)| < a$ であるから, 上式の両辺の絶対値をとれば,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)}{x}\right| = |f'(c)| < a \\
\Leftrightarrow &\frac{|f(x)|}{|x|} < a \\
\Leftrightarrow &|f(x)| < a|x| = |ax| \quad (\because |x| > 0, a > 0) \\
\therefore &- ax < f(x) < ax
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

---

* 問題は指定教科書「北岡, 深川, 河村著, 『工科系の微分積分学の基礎』」p.33 を参照.

† HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp

*1 講義でも注意したように, 実数 p に対する累乗はまだ定義していないが, ここでは, 深入りしない. 教科書 p.48 を参照せよ.