問題 1.5[A] 3 の解答例 *

植松 哲也 †

2016 年 5 月 10 日

3 (1) **解答.** $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．このとき,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 + bx + c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2ax + h + b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2ax + h + b) \\
&= 2ax + b
\end{aligned}
$$

と求まる．

3 (2) **解答.** $f(x) = x^4$ とおく．このとき,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

と求まる．

* 問題は指定教科書「北岡, 深川, 河村著, 『工科系の微分積分学の基礎』」p.30 を参照.

† HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp

3 (3) **解答.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおく．このとき,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

と求まる．

3 (4) **解答.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ とおく．このとき,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \\
&= -\frac{2x}{x^4} \\
&= -\frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

と求まる．

3 (5) **解答.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{h((\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h((\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}\\
&= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

と求まる．[*1]

[*1] 3 行目は分子の有理化をするために，展開公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ を用いて変形している．