問題 1.2[A] 2.(2), (3) の解答例 *

植松 哲也 †

2016 年 4 月 5 日

2.(2) **解答.**

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{n^2}$$

とおく. すべての自然数 n に対して,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad \therefore a_n < a_{n+1}$$

なので, 増加数列である. また,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

であるから, 上の限界[*1] は存在する (例えば 2 がとれる.) □

(注) $\dfrac{1}{k^2}$ を幅 1, 高さ $\dfrac{1}{k^2}$ の長方形の面積と考えることで, $y = \dfrac{1}{x^2}$ と x 軸, $x = 1$ と $x = n$ で囲まれたグラフの面積と比較し, 不等式

$$a_n \leq \frac{1}{1^2} + \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

を示せる (絵を描いて考えましょう) ので, ここからも, 上の限界があることが示せます.

2.(3) **解答.**

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

とおく. すべての自然数 n に対して,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0 \quad \therefore a_n < a_{n+1}$$

---

* 問題は指定教科書「北岡, 深川, 河村著, 『工科系の微分積分学の基礎』」p.11 を参照.

† HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp

[*1] $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_n \leq M$ となるような実数 M のこと. 第 2 講で扱うように,「数列 $\{a_n\}$ の上界」という.

なので, 増加数列である. また, 任意に自然数 N をとり, $n > 2^N$ とすると,

$$\begin{aligned}
&a_n > a_{2^N} \\
&\quad = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\
&\quad > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^N} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\
&\quad = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \quad (N\ \text{個}) \\
&\quad = 1 + \frac{N}{2}
\end{aligned}$$

となる. N は任意であったから, $1 + \dfrac{N}{2}$ はいくらでも大きくなり, したがって, a_n もいくらでも大きくなる. したがって, 上の限界は存在しない. □

(注) これも, $\dfrac{1}{k}$ を幅 1, 高さ $\dfrac{1}{k}$ の長方形の面積と考えることで, $y = \dfrac{1}{x}$ と x 軸, $x = 1$, $x = n + 1$ で囲まれたグラフの面積と比較し, 不等式

$$a_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

を示せる (絵を描いて考えましょう) ので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$ から, 上の限界がないことが示せます.