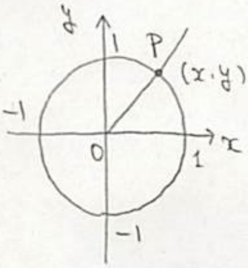
p.51〜54
復習をうながす

三角関数



ラジアン　$\pi\ \mathrm{rad} = 180^\circ$

一般角 θ の動径と単位円との交点を $P(x, y)$ とするとき

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める（$\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$ のとき $\tan\theta$ は定義されない）

性質

(1) 相互関係　$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,　$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$　$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(2) 加法定理　$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \mp \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

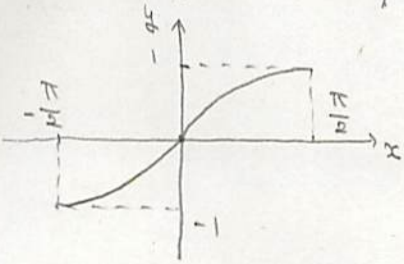
(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(4) $(\sin x)' = \cos x$,　$(\cos x)' = -\sin x$.　$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

逆三角関数とそのグラフ

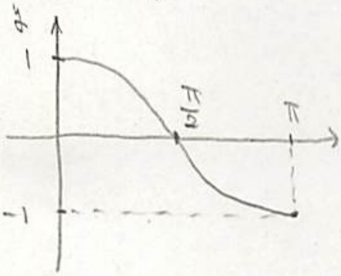
まず三角関数のグラフを思い出す。逆関数を考えたいので、ここでは単調関数になるような区間で考える

$y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$



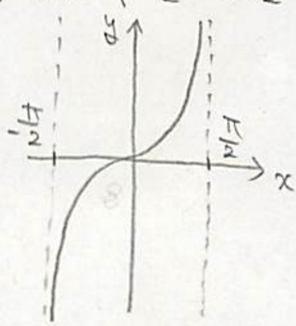
値域 $[-1, 1]$

$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \pi\right)$



$[-1, 1]$

$y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$



$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

注　区間のとり方はたとえば $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$ で $\sin x$ を考えても逆関数は考えられるが、ふつうは何もことわらなければこの範囲にすることが多い
違う区間をとれば当然逆関数も変わってくる。

逆三角関数の微分

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ はそれぞれ微分可能であるから, 定理1.19 より, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ も微分可能である。

これらの導関数を求めよう

定理 (1) $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $(\cos^{-1}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

証明 (1) $y = \sin^{-1}x \iff x = \sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq x \leq 1\right)$

であり, $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\ で\ \cos y \geq 0\ なので.\right)$

$$= \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

したがって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ //

(2) $y = \cos^{-1}x \iff x = \cos y$ $(0 \leq y \leq \pi,\ -1 \leq x \leq 1)$

であり $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y$ (この区間で $\sin y \geq 0$ より)

$$= -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}.$$

したがって. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ // (例(2)を用いてもよい)

(3) $y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}\right)$

であり $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1+\tan^2 y = 1+x^2.$

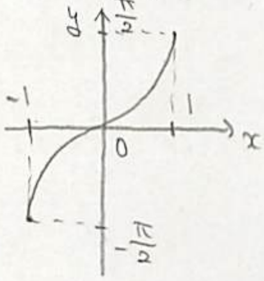
したがって. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ //

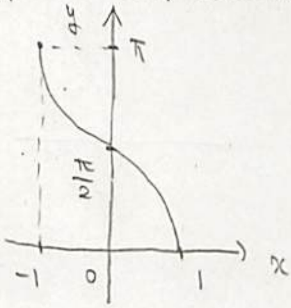
定理1.9により これらには逆関数が存在する：

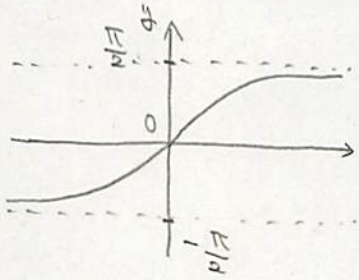
$x=\sin^{-1}y$ 　($\arcsin y$)　　$x=\cos^{-1}y$ 　($\arccos y$)　　$x=\tan^{-1}y$ 　($\arctan y$)

それぞれのグラフは次のようになる：

$y=\sin^{-1}x\ (-1\leqq x\leqq 1)$　　$y=\cos^{-1}x\ (-1\leqq x\leqq 1)$　　$y=\tan^{-1}x\ (x\in\mathbb{R})$







値域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$　　$[0,\pi]$　　$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

例(1) 1.10[A] 3.(2)　$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ 　($\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=x \iff \sin x=-\frac{1}{2}$ 　$\therefore\ x=-\frac{\pi}{6}$ 　のように計算する)

(4)　$\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2}$

(9)　$\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

例(2)　$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ が成り立つ

証明　$t=\sin^{-1}x$ とおくと，$x=\sin t$ である $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t=x$ なので　$\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-t$

$\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=t+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{\pi}{2}$

//

例 1.10[A] 4. (3) $(\sin x\cos x)' = \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x \quad (= \cos 2x)$$

//

5(1) $$\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}\cdot\frac{2.}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

//

6(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1\cdot 1 = 1$$

//

別 $$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1.$$

mMathNote 2(3), 4(4). 5(2). 6(3)

1.10[A]