問題 1.6[A] 2 (2) について *

植松 哲也 †

2016 年 5 月 10 日

2 (2) 第 5 講において, この関数のグラフには, x 軸や y 軸に平行でない漸近線が存在することに触れた. そのことについて, 補足する.

一般に, 関数 $y = f(x)$ について,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0 \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$$

となる定数 a, b が存在するとき, 「$y = f(x)$ のグラフは, 漸近線 $y = ax+b$ をもつ」という[*1]. 感覚的にいえば, 十分先で, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = ax+b$ のグラフとが限りなく近づく, ということである. 与えられた関数が, このような漸近線を持つかどうかは, 関数のグラフが $x \to \pm\infty$ で"1 次関数的" であるかどうかで決まる. 特に, 分数式の場合は,

$$(\text{分子の次数}) - (\text{分母の次数}) = 1$$

というのがその条件となる.

例. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x+1}$ を考える. 割り算により,

$$x^2 - x + 3 = (x+1)(x-2) + 5$$

となるので,

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x+1} = x - 2 + \frac{5}{x+1}$$

である. したがって, 直線 $y = ax+b$ として, $y = x - 2$ を考えると,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (x-2)) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x+1} = 0$$

となって, $y = x - 2$ が $y = f(x)$ の漸近線であることがわかる.

* 問題は指定教科書「北岡, 深川, 河村著, 『工科系の微分積分学の基礎』」p.32 を参照.

† HP: http://math.dge.toyota-ct.ac.jp/uematsu/ja/teaching.html, メールアドレス: riko1bl@meijo-u.ac.jp

*1 $a = 0$ の場合は, x 軸に平行な漸近線となる.