

複素数の効用

鈴木紀明 (名城大学理工学部)

「自然数を作り出したのは神で、その他はすべては人間の手の仕業だ」は数学者クロネッカー (1823-1891) の言葉ですが、自然数に始まって、整数、実数、複素数という数の世界の広がりはずしもスムーズでは無かったようです。これらの拡大は、負数、無理数、そして虚数を付け加えることによってなされたわけですが、新しい数の呼び名がすべて否定的用語 (負 (negative), 無理 (irrational), 虚 (imaginary)) であったことからその導入への反発・抵抗がうかがい知れるからです。

さて、複素数の歴史を振り返ってみよう¹。私達が複素数に始めて出会うのは、2次方程式の解の公式においてでしょう。 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられるので、 $x^2 + 1 = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{-4}/2 = \pm\sqrt{-1}$ となりますが、実際には、この解のために $\sqrt{-1}$ が考えられたのではないようです。虚数の概念の発生はルネッサンスの頃のように、当時の人々にとって $x^2 + 1 = 0$ はむしろ解なしとして扱われ、それ以上の考察はなかったのです。歴史的には3次方程式の解法において始めて虚数を考える必要性が生じました。1545年に、カルダノ (1501-1576) は3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解の公式として

$$x = -\frac{b}{3a} + \omega^3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \omega^2 \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

($p := c/a - b^2/3a^2$, $q = d/a - bc/3a^2 + 2b^3/27a^3$, $\omega = 1, (-1 \pm \sqrt{-3})/2$) を得ました²。これに従えば、例えば $x^3 - 15x - 4 = 0$ の解は

$$\omega^3 \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \omega^2 \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}$$

となります。一方、 $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$ より $x = 4$ は明らかに解ですから、上のどれかと一致するはずですが、実際に $4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}$ が成り立つのですが³、このように実数の解も虚数を使って表される事実と直面して、虚数を取り扱うことの必要性が生

¹ 本稿は拙著 [数学基礎] 複素関数, 培風館 (2001) の0章の一部を加筆修正したものである。

² 3次方程式の解法については、 $x^3 + px + q = 0$ の形の方程式の解法を最初に得たのはタルタリア (1500?-1557) で、カルダノはその公式を騙し取ったとも伝えられている。いずれにせよカルダノは“相当の”人物であつたらしい。森毅著の異説数学者列伝 (蒼樹書房) によれば、「16世紀イタリアで、最大の医術者、最大の自然哲学者、最大の数学者、最大の錬金術師、最大の占星術師、最大の手相術師、最大の魔術師、そして最大の賭博師といわれたのは、カルダノであった」。

$x^3 + px + q = 0$ の解法の概略を示す。解 α が一つ見つければ、因数定理から $(x - \alpha) \times (2次式) = 0$ となり残りの解もわかる。解法のアイデアは恒等式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ の利用である。 $-3yz = p$, $y^3 + z^3 = q$ とすれば左辺は $x^3 + px + q$ となり、 $x = -y - z$ が一つの解である。 $y = -p/(3z)$ を $q = y^3 + z^3$ に代入して $z^6 - qz^3 - (p/3)^3 = 0$ となり、 $z^3 = t$ とすれば $t^2 - qt - (p/3)^3 = 0$ は2次式で、 $t = q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$ が解より $z = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$ である。 $y^3 = q - z^3 = q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$ から $y = \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$ となり $x = -y - z = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} - \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$ が一つの解である。

³ $(2+i)^3 = 2 + 11i$, $(-2+i)^3 = -2 + 11i$ なので $\sqrt[3]{2+11i} - \sqrt[3]{-2+11i} = (2+i) - (-2+i) = 4$ 。

じたのです⁴。虚数に対する不可解さが続く一方で⁵，その有用性については疑いないものになっていきました。

1748年にオイラー(1707-1783)は $i = \sqrt{-1}$ の記号を使って⁶，“魔術的な公式”⁷

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を示しました。この公式を使えば，一見神秘的なド・モアブル(1667-1754)の公式

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

も $(e^{ix})^n = e^{inx}$ と説明でき，さらに

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} \iff \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{cases}$$

となって，指数関数の指数法則と三角関数の加法定理が結びつきます⁸。しかしながら，オイラーでさえも $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(-4)} = \sqrt{4} = 2$ のような間違いをしていて，虚数の正確な基礎付けは18世紀末のガウス(1777-1855)の登場まで待たねばなりません。1799年にガウスは複素数を平面上の点と解釈して，その幾何学的理論を展開させ，次の代数学の基本定理の証明に成功しました⁹：

「 n 次方程式は複素数の範囲で必ず解を持つ」

この定理の意味するところは深い。 $i = \sqrt{-1}$ を加えた複素数を考えることによって，実数の範囲では解をもたない $x^2 = -1$ が解けるようになるだけでなく，複素数の範囲ではすべての次数の n 次方程式が解けるのです。これ以上“新しい数”を付け加える必要はないのです¹⁰。この意味で，複素数はより重要なものになり，さらには数学において不可欠のものとなったのです。

ハミルトン(1805-1865)は1835年，実数の組 (a, b) に対して和と積を

$$\begin{cases} (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) \end{cases}$$

⁴ 4次方程式の解の公式はカルダノの弟子フェラーリが発見した。

⁵ 負の数の対数におけるライプニッツ(1646-1716)とベルヌーイ(1667-1748)の論争も今日から見れば滑稽でさえある。ベルヌーイは $\log(-x) = (\log(-x)^2)/2 = (\log x^2)/2 = \log x$ から， $\log(-x)$ は実数であると信じていた。一方，ライプニッツは不可解ながらも $\log(-1)$ は虚数であると主張した。

⁶ オイラーが始めて $\sqrt{-1}$ を i と表したが，実際には一度しか使っていないらしい。ガウスが i を使うようになってから広まった。ちなみに，電気の分野では i は電流を表すので j が使われる。

⁷ 物理学者のファインマンは「数学における最もすばらしい公式で，これは我々の至宝である」と記している(ファインマン物理学 I 力学(坪井忠二訳)，岩波書店(1965年))。ここで e は自然定数の底で

$$e = 2.718\cdots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

です。なお， x は実軸からの角度ですが，単位はラジアンなので注意してください。オイラーの公式で $x = \pi$ とすると $e^{i\pi} + 1 = 0$ となります。この等式は数学において最も重要な数 $0, 1, \pi, i, e$ で構成されていて大変興味深いものです。数学を，解析，幾何，代数に分けたとすると， e は解析学， π は幾何学， i は代数学の代表である。

⁸ 数学者アダマール(1865-1963)は“The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex plane(実数における二つの事実を結ぶ最短路は複素数の中を通っている)”と言っている。

⁹ アーベル(1802-1829)は5次方程式に解の公式がないことを証明した。これはガウスの結果とは矛盾しない。ガウスは解が常に存在することを主張したのに対して，アーベルは5次以上では解は4則演算とべき根 $(\sqrt{\quad}, \sqrt[3]{\quad}, \dots)$ で書き表せない(代数的には解けない)ことを示したのである。実際，楕円関数を使えば，解を具体的に記述することができる。

¹⁰ $x^4 = -1$ の解のためには \sqrt{i} のような新しい数が必要に思えるかもしれないが，実際は $\sqrt{i} = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ となりこれも複素数である。

で定義しました¹¹ . このとき $(1, 0) = 1$, $(0, 1) = i$ とすれば,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + bi$$

となって, 平面の点と複素数を同じものとみなすことができます¹² . さらに, 「複素数の四則演算は実数と同じように行い, i^2 がでたら -1 にする」という天下りのな計算法も

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

となって正当化されます. この考察は複素数が2次元的な数であること示しています. 当然のことながら $n \geq 3$ に対して n 次元の点を “ n 次元的な数” と見なすことができないのかという疑問がおこるでしょう. 結果は否です. (a_1, a_2, \dots, a_n) と (b_1, b_2, \dots, b_n) に対して, 分配法則, 交換法則, 結合法則などの実数の持つ性質を満たすように和と “積” が定義できるのは $n = 2$ のみであることが証明されるのです¹³ . いずれにしても, 複素数が互いに掛け算ができる事実が, 物理学などへの応用において極めて重要であったことは間違いありません¹⁴ .

最後に, 複素数の積の幾何学的意味について注意しておきます. それは

「 i を掛けることは 90° の回転である」

ことです¹⁵ . すなわち $a + ib = (a, b)$ に対して

$$i(a + ib) = -b + ia = (-b, a)$$

はベクトル (a, b) を反時計まわりに 90° 回転して得られます. これから $i^2 = -1$ は 180° の回転となるので, 「 $(-1) \times (-x) = x$ は $-x$ を 180° の回転 (すなわち, 反転) をして x となる」と解釈できて, (負の数) \times (負の数) = (正の数) を合理化します.

¹¹ 積の定義は一見不自然である (複素数との対応からは自然であるが). しかし, この種のことを我々は既に経験している. 分数の和と積について, 積 $(a/b)(c/d) = (ac/bd)$ はともかく, 和 $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd$ は奇妙に見える.

¹² 和と積も対応していることに注意せよ:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) &\iff (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) &\iff (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad) \end{aligned}$$

¹³ より正確に言うと, 「 $a = (a_1, \dots, a_n)$ の長さを $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ で定めたとき, $|a \times b| = |a||b|$ が成り立つような積が定まるのは $n = 1, 2, 4, 8$ のみである」ことをフルヴィッツ (1859-1919) が示した. $n = 4$ の場合がハミルトンの4元数, $n = 8$ はケイリー (1821-1895) の8元数と呼ばれる. ただし, 4元数では交換法則 $a \times b = b \times a$ が成り立たない. 8元数では結合法則 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ も成り立つとは限らない.

¹⁴ アインシュタインの相対性理論における4次元時空 (3次元空間と時間) の幾何学は, 時間座標を純虚数と解釈できる. また量子力学の基礎をなすシュレーディンガー方程式 $ih\partial\Psi/\partial t = \hat{H}\Psi$ には虚数が含まれている (h はプランク定数, Ψ は波動関数, \hat{H} はハミルトン演算子).

¹⁵ ガモフ (理論物理学者) は虚数を使う簡単な応用として次の「宝探し問題」を著書の中で紹介している (新版「1, 2, 3... 無限大」白楊社 (2004) p.49). “船で北緯 $\bigcirc\bigcirc$ 度, 西経 $\bigcirc\bigcirc$ 度に進めば, 無人島を発見するだろう. 島の北岸に横たわりさえぎるもののない広大な平原に, 1本のカシの木と1本の松の木が寂しく立っているのに気づくはずだ. 裏切り者を絞め殺した1台の絞首台があるからそれを探せ. 絞首台からカシの木に向かい歩数を数えつつ歩むように. カシの木に着いたら, 右へ90度向きを変え, さらに同歩進む. そこで大地に杭を打つ. 再び絞首台から松の木に向かって歩数を数えつつ歩め. 松の木に至って, 左に90度向きを変え, さらに同歩進む. そこで再び大地に杭を打て. 杭と杭との中間を発掘せよ. 宝が見つかるはずだ” 実際にその地に行くと, カシの木と松の木はあったが, 絞首台は影も形もなかった. 宝は見つけられるか?

(複素)関数論は複素数についての微積分と言えます。通常の実数値関数 $f(x)$ では、

$$(*) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在するとき、 f は微分可能で、この値を $f'(x)$ と書きます。曲線 $y = f(x)$ の点 $x = a$ における接線の傾きが $f'(a)$ です。一方、積分である

$$\int_a^b f(x) dx$$

は $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積です。17世紀後半に「接線の傾き」と「図形の面積」が互いに逆の演算であることをニュートン (1642-1727) とライプニッツ (1646-1716) は独立に見抜きました。微分積分学の始まりです。

一方、複素関数 $f(z)$ についても、

$$(**) \quad \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

が収束するとき、微分可能と言い、この値を $f'(z)$ と表します。 $(*)$ と $(**)$ は見た目以上に違います。実際、区間で微分可能な実数値関数の導関数 $f'(x)$ は微分可能とは限りませんが、複素平面の領域で1回微分可能な複素関数 (正則関数という) はそこで、無限回微分可能です。この違いは $h \rightarrow 0$ と $w \rightarrow 0$ の違いから生まれます¹⁶。正則関数 $f(z)$ は何回でも微分可能であり、さらに、(単連結領域における) 閉曲線 C に沿っての積分の値は0である、すなわち、

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立ちます。これがコーシー (1789-1857) の積分定理です。正則関数の基本性質はすべてこの定理から導かれます。例えば、先ほどの無限回微分可能性も、コーシーの積分定理から導かれるべき級数展開可能性によって示されます。また「複素平面全体で正則で有界な関数は定数である」というリュービル (1809-1882) の定理も導かれ、この定理を用いるとガウスが苦労した「代数学の基本定理」の証明も非常に簡単明瞭です。さらに、コーシーは実数値関数の積分値や級数の計算を目的とした留数定理を示しますが、これも彼の積分定理の簡単な応用です。例えば、留数定理を使えば $0 < a < 1$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

の値が $\pi/(\sin a\pi)$ および $1/(2a^2) + \pi/(2a \sinh a\pi)$ になることが比較的簡単にわかります¹⁷。最後に素数定理に触れます。ガウスは1792年頃 (15歳のとき) に「 n 番目の素数は大体 $n \log n$ である」と予想しました¹⁸。この主張はリーマンのゼータ関数による考察を経て、最終的には、1896年にアダマールとドゥ・ラ・バレ・プーサンによって独立に証明されます。特筆すべきことは、その証明に複素関数論 (留数定理) が使われたことです。

¹⁶ 数直線の場合は $h \rightarrow 0$ は $h > 0$ から0に行くか、 $h < 0$ から0に行くかのどちらかであるが、複素平面では w が0に行く方法は非常に多様である。どのように w が0近づいても同じ値に収束していることを課す $(**)$ は実は非常に強い条件なのである。

¹⁷ 脚注8のアダマールの言葉を思い出せ。

¹⁸ 同じことであるが x 以下にある素数の個数を $\pi(x)$ で表すと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x) \log x/x = 1$ が成り立つ。